CORRIGES DES EXERCICES : Cinématique

****

EXERCICE 1

Une automobile est en mouvement rectiligne horizontal. Pendant les 25 premières secondes, la vitesse de l'automobile croît de 0 à 20ms^{-1}. L'automobile a ensuite un mouvement uniforme puis jusqu'à l'arrêt un mouvement uniformément retardé d'accélération 0,5 ms^{-2}. La distance totale parcourue par l'automobile est 10 km.

1. **Le temps pendant lequel le mouvement est freiné est :**

   Le mouvement de l'automobile se fait en trois phases.

   Phase 1 : mouvement rectiligne uniformément accélérée.

   v_0= 0m/s et v_1=20m/s

   Phase 2 : mouvement rectiligne uniforme.

   v_1= 20m/s et v_2=20m/s

   Phase 3 : mouvement rectiligne uniformément retardé.

   v_2= 20m/s et v_3=0m/s

   $v_3 - v_2 = a_3\,\Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{v_3 - v_2}{a_3} = \frac{0-20}{-0,5} = 40s$

   $\boxed{\Delta t_3 = 40s}$

2. **La distance parcourue à vitesse constante (pendant la 2ème phase) est :**

   $d = d_1 + d_2 + d_3 \Rightarrow d_2 = d - (d_1 + d_3)$

   Calcul de a_1

   $v_1 - v_0 = a_1\,\Delta t_1 \Rightarrow a_1 = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t1} = \frac{20-0}{25} = 0,8m.s^{-2}$

   Calcul de d_1

   $v_1^2 - v_0^2 - = 2\,a_1\,d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2\,a_1} = \frac{20^2 - 0^2}{2\times0,6} = 250m$

Calcul de d_3

$v_3^2 - v_2^2 - = 2\, a_3\, d_3 \Rightarrow d_3 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2\, a_3} = \frac{0^2 - 20^2}{-2 \times 0{,}5} = 400\text{m}$

Finalement, $d_2 = d - (d_1 + d_3) = 10\,000 - (250 + 400) = 9\,350\text{m}$

$\boxed{d_2 = 9\,350\text{m}}$

3. <u>la durée totale du trajet est :</u>

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$

$\Delta t_1 = 25\text{s}$

$\Delta t_3 = 40\text{s}$

Calcul de Δt_2

$d_2 = v_2\, \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{9\,350}{20} = 467{,}5\text{s}$

$\Delta t_2 = 467{,}5\text{s}$

Finalement, $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25 + 40 + 467{,}5 = 532{,}5\text{s}$

$\boxed{\Delta t = 532{,}5\text{s}}$

<u>EXERCICE 2</u>

Un cylindre mobile sans frottement autour d'un axe fixe horizontal passant par son centre de gravité, tourné à vitesse constante à raison de 720tr/min. On l'arrête en 24s en le soumettant à l'action d'un couple de freinage.

1. **<u>L'accélération angulaire du cylindre est de :</u>**

$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}\, \Delta t \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\Delta t}$

$\dot{\theta} = 0$ car on freine jusqu'à l'arrêt.

$\dot{\theta}_0 = \frac{720 \times 2\pi}{60} = 75{,}\ 36\text{rad.s}^{-1}$

$\ddot{\theta} = \frac{0 - 75{,}36}{24} = -\ 3{,}14\text{rad.s}^{-2}$

$\boxed{\ddot{\theta} = -\ 3{,}14\text{rad.s}^{-2}}$

2. Le temps au bout duquel sa vitesse est réduite de moitié est :

En utilisant la même relation, on a :

$\dot{\theta}_1$ - $\dot{\theta}_0$= $\ddot{\theta}$ Δt_1 ⇒ $\Delta t_1 = \frac{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}$ mais $\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0$

$\Delta t_1 = \frac{\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}} = \frac{37{,}38 - 75{,}36}{-3{,}14} = 11{,}9s$

$\boxed{\Delta t_1 = 11{,}9s}$

3. **Le nombre de tours effectués pendant la durée de freinage est de :**

Soit n le nombre de tours.

$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$

Calcul de Δθ

$(\dot{\theta})^2 - (\dot{\theta}_0)^2 = 2\,\ddot{\theta}\,\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{(\dot{\theta})^2 - (\dot{\theta}_0)^2}{2\,\ddot{\theta}}$

$\dot{\theta}$=0 car on freine jusqu'à l'arrêt.

$\dot{\theta}_0$= 75, 36rad.s^{-1}

Finalement, $\Delta\theta = \frac{(0)^2 - (75{,}36)^2}{2 \times (-3{,}14)} = 904{,}32$ rad

$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{904{,}32}{2\pi} = 143{,}9 \approx 144$ tours

$\boxed{n = 144 \text{ tours}}$

4. **Le nombre de tours effectués par le cylindre avant que sa vitesse soit réduite de moitié est de**:

$n' = \frac{\Delta\theta'}{2\pi}$

Calcul de Δθ

$(\dot{\theta})^2 - (\dot{\theta}_0)^2 = 2\,\ddot{\theta}\,\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = \frac{(\dot{\theta})^2 - (\dot{\theta}_0)^2}{2\,\ddot{\theta}}$

$\dot{\theta} = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0$ = 37,68 rad.s^{-1} car avant que sa vitesse soit réduite de moitié.

$\dot{\theta}_0$= 75, 36rad.s^{-1}

Finalement, $\Delta\theta = \frac{(37{,}68)^2 - (75{,}36)^2}{2 \times (-3{,}14)} = 678{,}24$ rad

$n' = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{678{,}24}{2\pi} = 108$ tours

$\boxed{n' = 108 \text{ tours}}$

EXERCICE 3

Un point matériel M animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence 50Hz, part d'une position extrême A atteint l'autre position extrême B en bout de 10s parcourant ainsi 10cm.

1. **L'équation horaire du mouvement est** :

On sait que l'équation horaire d'un mouvement sinusoïdal s'écrit :

$x(t)=X_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Il suffit de remplacer les valeurs de X_m , ω et φ.

$X_m=10cm=10^{-2}$ m, $\omega=2\pi N=100\pi$ rad.s^{-1} et si on choisit le point A comme origine donc $x(0)=0=\sin\varphi \Rightarrow \varphi=0$.

Finalement, $\boxed{x(t)=10^{-2} \sin(100\pi t)}$

2. **La vitesse maximale de M est de :**

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = X_m \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 100\pi \times 10^{-1} \cos(100\pi t) = 31{,}4\cos(100\pi t)$

Finalement, $\boxed{v_{max} = 31{,}4 m.s^{-1}}$

3. **L'accélération de M en B est de :**

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = - X_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

$a(t) = - 9859{,}6\sin(100\pi t)$

En B, t=10s

$a_B= a(0)= - 9859{,}6\sin(100\pi \times 0)=0m.s^{-2}$

$\boxed{a_B=0m.s^{-2}}$

4. **Le temps au bout duquel M passe pour la 3ème fois au point situé à 2,5cm est de :**

$x(t)=10^{-1} \sin(100\pi t)= 2{,}5. 10^{-2}$

$\sin(100\pi t)= 0{,}25$

$100\pi t = \sin^{-1}(0{,}25)=0{,}25rad + 2k\pi$

$t = \frac{0{,}25}{314} + \frac{2k}{314}$

M passe pour la 3ème fois au point situé à 2,5cm alors k=2

Alors $t = \frac{0{,}25}{314} + \frac{4}{314} = 10^{-2}s$

$\boxed{t = 10^{-2}s}$

EXERCICE 4

Etude du mouvement du mobile ponctuel M.

Voici les données : accélération constante : $a = 4\ ms^{-2}$; abscisse initiale : $x_o=1$ m ; vitesse initiale : $v_o = -3\ ms^{-1}$.

1. **Explication :** Le mouvement de M est un mouvement rectiligne uniformément varié car sa trajectoire est une droite et que son accélération est une constante.
2. **Les expressions générales des vecteurs accélération, vitesse et position en fonction de l'abscisse x(t) du point M :**

   $\vec{a} = \frac{d^2x(t)}{dx^2}\vec{\imath}$: vecteur accélération

   $\vec{v} = \frac{dx(t)}{dx}\vec{\imath}$: vecteur vitesse

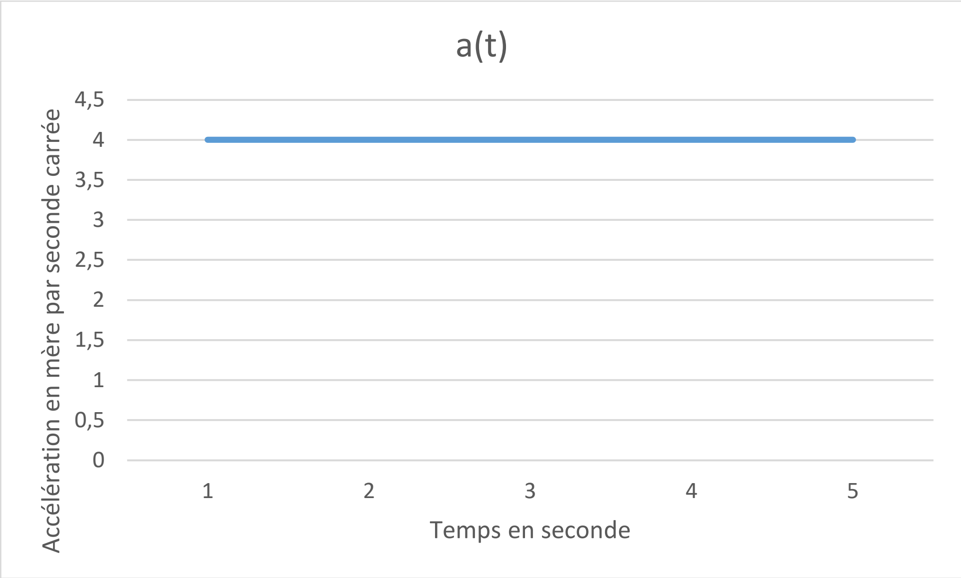
   $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath}$: vecteur position
3. L'équation de la vitesse $v_x(t)$ et l'équation horaire x (t).

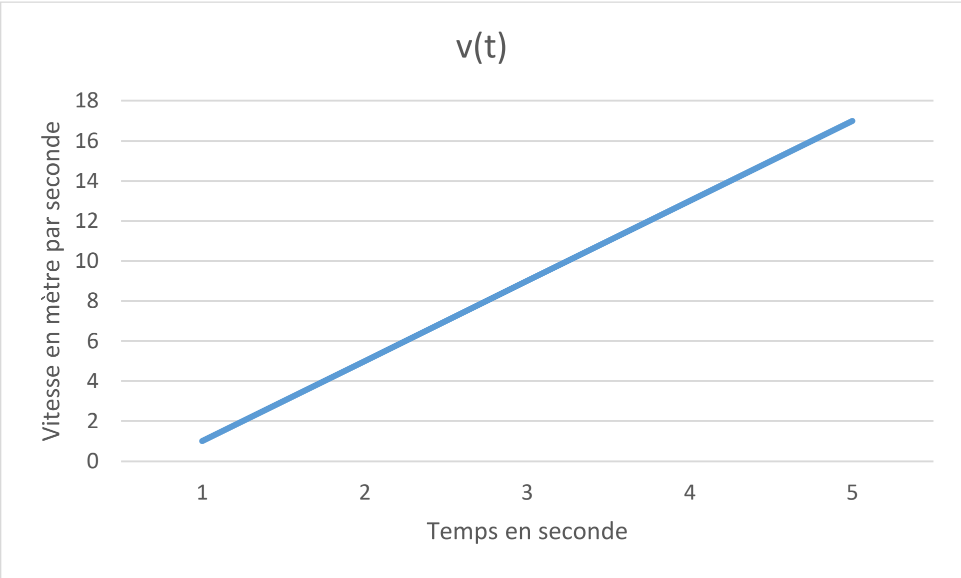
   $v_x(t) = at + v_0$

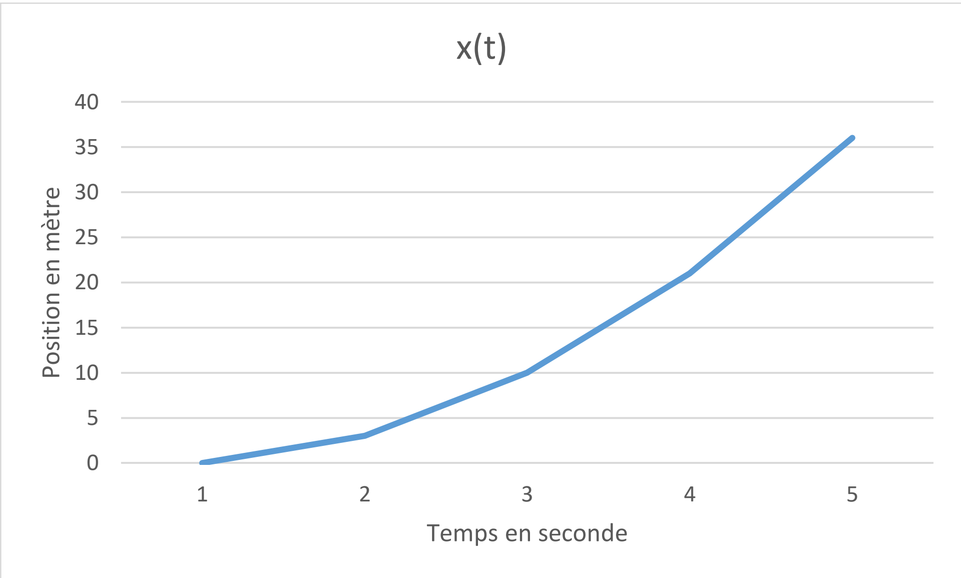
   $\boxed{v_x(t) = 4t - 3}$

   $x(t) = \frac{1}{2}a\,t^2 + v_0\,t + x_0$

   $\boxed{x(t) = 2t^2 - 3t + 1}$
4. Représentations graphiques x(t), v(t) et a(t).







5. Les dates auxquelles le mobile passe à l'origine 0.

Pour avoir ces dates, on résout l'équation : $x(t) = 2t^2 - 3t + 1 = 0$

Cette équation admet deux solutions : $t_1=0{,}5s$ et $t_2=1s$.

Ses vitesses sont respectivement : $v_1= -1m.s^{-1}$ et $v_2=1m.s^{-1}$.

On peut alors distinguer 2 phases dans le mouvement de M, il se dirige vers la gauche dans un premier temps puis il rebrousse chemin et se dirige vers la droite.

6. Au cours de son évolution, oui, le mobile a changé de sens de parcours.

   Pour trouver cette date, on résout l'équation $v_x(t)= 4t - 3=0$.

A la date t=0,75s, le mobile change de sens de parcours, il se trouve à la position x= - 0,125m.

EXERCICE 5

1. La vitesse angulaire, la fréquence et la période du mouvement.

   Par définition, la vitesse angulaire est la dérivée par rapport au temps t de l'abscisse angulaire, donc $\dot{\theta}=5rad.s^{-1}$.

   La fréquence du mouvement est donnée par $f=\frac{\dot{\theta}}{2\pi}= 0{,}8Hz$

   La période est l'inverse de la fréquence, $T= \frac{1}{0{,}8}=1{,}25s$.

2. **L'équation de la trajectoire de M est :**

   La trajectoire du mouvement de M est un cercle de centre l'origine 0 du repère et de rayon R=5cm.

   De ce fait, l'équation cartésienne de la trajectoire de M est

   $x^2 + y^2 - 2{,}5.10^{-3}=0$.

3. **Le module de la vitesse est :**

   Pour un mouvement circulaire, $v=R\dot{\theta}=0{,}25m.s^{-1}$.

   Le vecteur $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont perpendiculaires car le vecteur vitesse est toujours tangente à la trajectoire. Le mouvement de M est un mouvement circulaire uniforme.

4. Dans le repère de Frenet, le vecteur accélération est $\vec{a}$=$\vec{a}_t$ +$\vec{a}_n$. Or, l'accélération tangentielle est ici nulle donc $\vec{a}$=$\vec{a}_n$. Ce vecteur accélération suit un rayon.