Théorème de l’énergie cinétique

I- Introduction: Travail – Puissance – Énergie

Les objectifs de cette partie sont:

- Relier énergie potentielle et potentiel scalaire
- Savoir utiliser le théorème de l’énergie cinétique

Sur ce, il faut connaître les calculs vectoriels et savoir effectuer les dérivations partielles .

II- Puissance et travail d’une force

1) Puissance d’une force

Considérons une force appliquée en un point M décrivant une trajectoire (C) avec une vitesse instantanée dans un référentiel [R].

On appelle **puissance instantanée de la force** $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace avec une vitesse instantanée $\vec{v}$ dans le référentiel [R], la grandeur scalaire:

$P(t)=\vec{F}.\vec{v}$

On définit également la **puissance moyenne sur une durée T** comme la valeur moyenne pendant la durée T de la puissance instantanée:

$$\vec{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

L’équation aux dimensions d’une puissance est $[P]=M\,L^2T^{-3}$

L’unité de puissance dans le système international S.I est le Watt (W). La définition du Watt est donnée au paragraphe suivant.

2) Travail élémentaire d’une force

On appelle **travail élémentaire de la force** pendant l'intervalle de temps dt infiniment petit , la quantité scalaire:

P(t) dt = $\vec{F}.\vec{v}\,dt$

Le vecteur $\vec{dl}=\vec{v}\,dt$ est porté par la vitesse, donc tangent à la trajectoire ; on l’appelle déplacement élémentaire de M pendant l’intervalle de temps dt.

L'équation aux dimensions d'un travail est: $[W]=M\,L^2T^{-2}$

L'unité S.I. de travail est le **JOULE (J)**.

Un **travail de 1 Joule** est le travail d'une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force.

La définition de l'**unité de puissance, le Watt**, en résulte: une puissance de 1 Watt est la puissance d'une force fournissant un travail de 1 Joule pendant 1 seconde.

3) Travail au cours d'un déplacement fini

Lorsque le point d'application M de la force subit un déplacement de longueur finie de M_1 à M_2 sur une courbe quelconque (C), la force prenant en chaque point M de la courbe (C) des valeurs variables en norme et en direction, le travail de M_1 à M_2 est la somme des travaux élémentaires le long de tous les éléments de la courbe (C) ; cette intégrale s'appelle la **circulation** du vecteur de M_1 à M_2 le long de la courbe (C), on a donc :

$$W=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{dl}$$

Pour calculer cette intégrale, dite curviligne, il faut connaître l'équation de la courbe (C) et la valeur de la force en chaque point de (C).

$\vec{F}$ peut être une force unique dont le point d'application se déplace ou être un champ de forces résultant d'interaction à distance.

4) Travail d'un système de forces

Soit un système de points M_i. A un instant t , soit $\vec{F_i}$ la force appliquée en M_i, le point M_i ayant une vitesse $\vec{v_i}$ dans un référentiel [R]. Pendant l'intervalle de temps dt, le point d'application M_i de la force subit un déplacement $\vec{dl}=\vec{v}_i dt$.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F_i}$ pendant dt est $\vec{F_i}.\vec{dl_i}$

Le travail du système de forces, de l'instant t à l'instant t+dt, est la somme scalaire des travaux élémentaires de chacune des forces pendant l'intervalle de temps dt

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}.\vec{dl_i}$$

Cas particuliers:

1. Les déplacements de tous les points M_i sont équipollents, cela s'écrit: $\vec{dl_i}=\vec{dl} \qquad \forall i$

Par suite le travail élémentaire de toutes les forces est: $(\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}).\vec{dl}=\vec{F}.\vec{dl}$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées.

Le travail d'un système de forces dont les points d'applications subissent tous le même déplacement est égal au travail de la résultante des forces au cours du même déplacement. On peut rencontrer un tel exemple dans le cas d'un système indéformable en translation.

2. Toutes les forces appliquées aux points M_i sont égales (équipollentes);

cela s'écrit: $\vec{F_i}=\vec{F} \qquad \forall i$

Le travail élémentaire de toutes ces forces est: $\vec{F}.\sum_{i=1}^{N}\vec{dl_i}$

Le travail élémentaire est égal au travail de l'une de forces sur un déplacement égal à la somme vectorielle de tous les déplacements de tous les points M_i.

Conséquences :

Considérons un système de points matériels M_i de centre de masse G et supposons qu'une force soit appliquée à chaque point M_i . Sauf cas particuliers, le travail du système de forces est différent du travail de la résultante des forces appliquée au centre de masse. Notamment la résultante des forces peut être nulle et le travail de toutes les forces non nul. Par exemple le travail des forces intérieures à un système matériel peut ne pas être nul, alors que l'on sait que la résultante des forces intérieures est nulle.

III- Théorème de l'énergie cinétique

1) Cas du point matériel

Nous supposons maintenant le référentiel [R] **galiléen** et un point matériel mobile M de masse m animé d'une vitesse instantanée $\vec{v}$ dans [R] et auquel est appliquée une force $\vec{F}$.

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à M s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$

Le travail de la force au cours du déplacement du mobile de M_1 à M_2 est:

$$W_1^2=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{dl}=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}.\vec{v}\,dt$$

Compte tenu de l'expression du principe fondamental ci-dessus:

$$\mathrm{W}_1^2=\int_{M_1}^{M_2} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}.\vec{v}\,dt=\int_{M_1}^{M_2} m\vec{v}.\vec{dv}=\int_{M_1}^{M_2} d(\tfrac{1}{2}mv^2)$$

$$\mathrm{W}_1^2=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2$$

en appelant $\vec{v_1}$ la vitesse du mobile en M_1 et $\vec{v_2}$ sa vitesse en M_2

.

Théorème de l'Énergie cinétique pour un point:

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel lorsqu'il parcourt sa trajectoire d'un point M_1

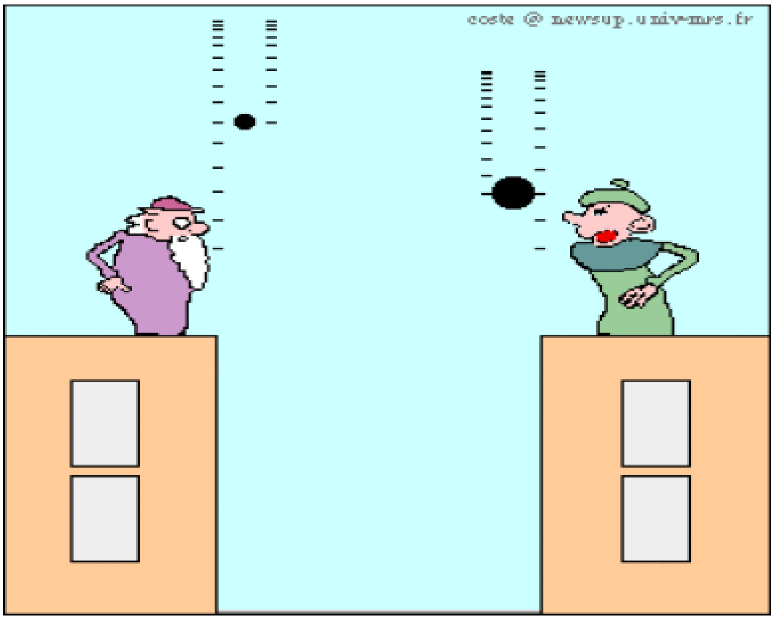
à un point M_2 est égale au travail de la résultante des forces appliquées au point matériel de M_1 à M_2

le long de la trajectoire.

Remarque :

On a dit "travail de la résultante des forces" car ces forces sont toutes appliquées au même point M

et on se trouve dans le cas où le travail de toutes les forces est égal au travail de la résultante.



La simulation suivante montre la chute de deux corps à laquelle peut s'appliquer le théorème précédent. Dans le cas de gauche, on considère que la seule force agissant sur la boule est son poids. Dans le cas de droite, en plus du poids de la balle agit une force de résistance de l'air.

2) Cas d'un système de points matériels

Soit un système de N points matériels dans un référentiel [R] galiléen le point M_i de masse m_i est animé à l'instant t d'une vitesse $\vec{v}_i$ et est soumis à l'action d'une force $\vec{F}_i$ qui se décompose naturellement en $\vec{F}_{ii}$ (force intérieure) et $\vec{F}_{iex}$ (force extérieure au système).

Dans [R] galiléen, le théorème de la quantité de mouvement appliqué à M_i s'écrit:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_{ii} + \vec{F}_{iex}$$

Envisageons un déplacement du système; le déplacement d'un point M_i est en général différent de celui d'un autre point M.

Pour le point M_i : appelons M_{i1} le point de départ et M_{i2} le point d'arrivée sur la trajectoire suivie par M_i

Le travail de la force s'écrit : $: W_i = \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} \vec{F}_i . \vec{v}_i dt$

et pour tous les points matériels du système, on fait la somme des travaux de toutes les forces:

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} \vec{F}_i . \vec{v}_i dt &= \sum_{i=1}^{N} \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} d(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_{i1^2} \end{aligned}$$

$$W = T_2 - T_1$$

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} \vec{F}_i . \vec{v}_i dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} \vec{F}_{iint} . \vec{v}_i dt + \sum_{i=1}^{N} \int_{M_{i1}}^{M_{i2}} \vec{F}_{iext} . \vec{v}_i dt$$

Théorème de l’Énergie cinétique pour un système:

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un système de points matériels entre un instant de départ et un instant d'arrivée est égale à la somme des travaux de toutes les forces (intérieures et extérieures) appliquées à chacun des points du système le long de la trajectoire de chacun de ces points dans le même intervalle de temps

Remarque:

Le théorème de l'énergie cinétique n'a de sens que si le référentiel par rapport auquel on détermine cette énergie cinétique est galiléen.

3) Expression instantanée du théorème de l'énergie cinétique

Considérons une force appliquée en un point M décrivant une trajectoire (C) avec une vitesse instantanée dans un référentiel [R].

La puissance instantanée de la force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace avec une vitesse instantanée dans le référentiel R est la grandeur scalaire: P(t) = $\vec{F}(t).\vec{v}(t)$

Or, à tout instant, on a $\vec{F}(t)=m\vec{\gamma}(t)$ et en reportant dans l'expression de la puissance, on obtient : P(t) = $m\vec{\gamma}(t).\vec{v}(t)$

qui n'est pas autre chose que la dérivée par rapport au temps de la fonction T : «énergie cinétique»: P(t) = $\frac{dT(t)}{dt}$

Dans le mouvement d'un point matériel par rapport à un référentiel galiléen, la puissance de la force totale est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique du point.

Unité d'énergie cinétique

Il résulte du théorème de l'énergie cinétique que l'énergie cinétique a *même dimension qu'un travail.*

Dans le système SI, l'énergie cinétique s'exprime comme le travail en **Joule**.