Exercices sur l'équation cartésienne de la trajectoire

Exercice 1.

Les équations horaires d'un mobile dans un repère (O,i,j) sont:

$x = 2t^2+1$ et $y = 4t^2+2t+6$.

1) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile

2) Donner la nature de la trajectoire du mobile.

Exercice 2

Dans un repère cartésien R (O,x,y,z) un point M se déplace selon les équations horaires suivantes:

$x(t) = 1+\cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = 0$

1) Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que c'est un cercle dont le centre C situé sur l'axe Ox (OC = 1cm) et donc le rayon est de 1m.

2) Exprimer le vecteur vitesse V. Précisez sa direction par rapport à la trajectoire. Donnez la valeur de la vitesse du point M et montrer que le mouvement est uniforme.

3) Exprimer le vecteur vitesse angulaire ω (également appelé vecteur rotation). Calculer la valeur de ω.

4) Exprimer le vecteur accélération a. Le comparer avec le vecteur $\overrightarrow{CM}$. Que peut-on dire de ce vecteur a par rapport au vecteur vitesse $\vec{V}$ et par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de a (la norme du vecteur accélération)

Exercice 3

Dans le repère (x,y), la position d'un point M est définie à chaque instant t par:

$$x(t)=2t^2+1 \quad \text{et} \quad y(t)=3t-2$$

Quelle est l'équation cartésienne de la trajectoire ?

Exercice 4

1) Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur (1,2,2).

2) Pour quelles valeurs de a les vecteurs (1,0,a) , (a,1,0) et (0,a,1) sont-ils coplanaires?

Corrigé:

On commence par normer le vecteur donné. Un vecteur unitaire colinéaire à (1,2,2) est $\vec{u}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. On cherche ensuite un vecteur orthogonal à celui-là. Le vecteur (0,1,-1) en est un. On le norme en $\vec{v}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Puis on forme leur produit vectoriel, et on trouve: $\vec{w}=(\frac{-4}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$.

La base ($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) est une base orthonormale directe.

Exercice 5

Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point M(2, $2\sqrt{3}$, 4).

Corrigé:

Soit m le projeté orthogonale de M sur le plan (Oxy). m a pour coordonnées (2, $2\sqrt{3}$, 0).

En particulier, on a Om=4 et $\overrightarrow{Om}$ = 4(cos $\pi/3$ $\vec{i}$ + sin $\pi/3$ $\vec{j}$) ⇒ Les coordonnées cylindriques de M sont donc: (4,π/3,4)

Pour déterminer les coordonnées sphériques, il faut déterminer la longueur OM et une mesure de l'angle $(\vec{k},\overrightarrow{OM})$.

Les coordonnées sphériques de M sont donc : ($4\sqrt{2}$,$\pi/3$,$\pi/4$).