Corrigé problème Bacc A 2023

Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{2x}-2e^{x}-3$. Sa courbe est désignée par (C).

1.- Vérifions que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$.

$\lim_{x\to-\infty} 2x=-\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0-3$

D'où $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$

Interprétation : On a une asymptote parallèle à l'axe des abscisses d'équation y = -3.

2.- a) $f(x)=e^{x}.e^{x}-2e^{x}-3$.

$f(x)=e^{2x}-2e^{x}-3=(e^{x})^{2}-2.e^{x}-3.e^{x}\cdot e^{-x}$

$f(x)=e^{x}.e^{x}-2e^{x}-3.e^{x}\cdot e^{-x}$

$f(x)=e^{x}(e^{x}-1-3.e^{-x})$

$\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty} (e^{x}-1-3.e^{-x})=+\infty$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$, donc on a une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

3. Les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses sont les points de la courbe d'ordonnée y = 0, donc ce sont les points d'abscisses x telles que f(x) =0.

Résolvons l'équation f(x) = 0.f(x)= 0 si et seulement si $e^{2x}-2e^{x}-3=0$.

Posons $e^{x}=X$, alors $e^{2x}=(e^{x})^{2}=X^{2}$.

L'équation s'écrit alors $X^{2}-2X-3=0$.

Calculons le discriminant Δ.

$\Delta=b^{2}-4ac=(-2)^{2}-4.1.(-3)=16=4^{2}$

On a deux racines distinctes $X'=\frac{-(-2)-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2.1}=-1$ et $X''=\frac{-(-2)+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{2.1}=3$

Pour X = 3, on a $X=e^{x}=3$,

$\ln e^{x}=\ln 3$, ce qui donne x = ln 3

Pour X = -1, on a $X=e^{x}=-1$, ce qui ne donne aucune solution.

Ainsi x = ln 3 est la seule solution.

Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses est donc le point A (ln x ; 0).

4. a Montrons que $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$.

$f'(x)=2.e^{2x}-2.e^{x}-0=2.e^{2x}-2.e^{x}$.

$f'(x)=2(e^{x})^{2}-2e^{x}$

Ainsi $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$

b) *Tableau de signe de f '(x)*

f '(x) = 0 si et seulement si $2e^{x}=0$ ou $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$

- $2e^{x}=0$ ne donne aucune solution.
- $e^{x}-1=0$ si et seulement si $e^{x}=1$, donc si x = 0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2e^{x}$	+		+
$e^{x}-1$	−	0	+
$2e^{x}(e^{x}-1)$	−	0	+

Tableau de variation de f

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$, f(0) = 1 – 2 – 3 =-4

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '(x)	−	0	+
f (x)	-3 ↘	-4	↗ $+\infty$

f '(0) = 0, donc on a une tangente horizontale au point de coordonnées (0 , -4)

5.- *Équation de la tangente à (C) en* $x_0=\ln 3$.

L'équation de la tangente à (C) en x_0 est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

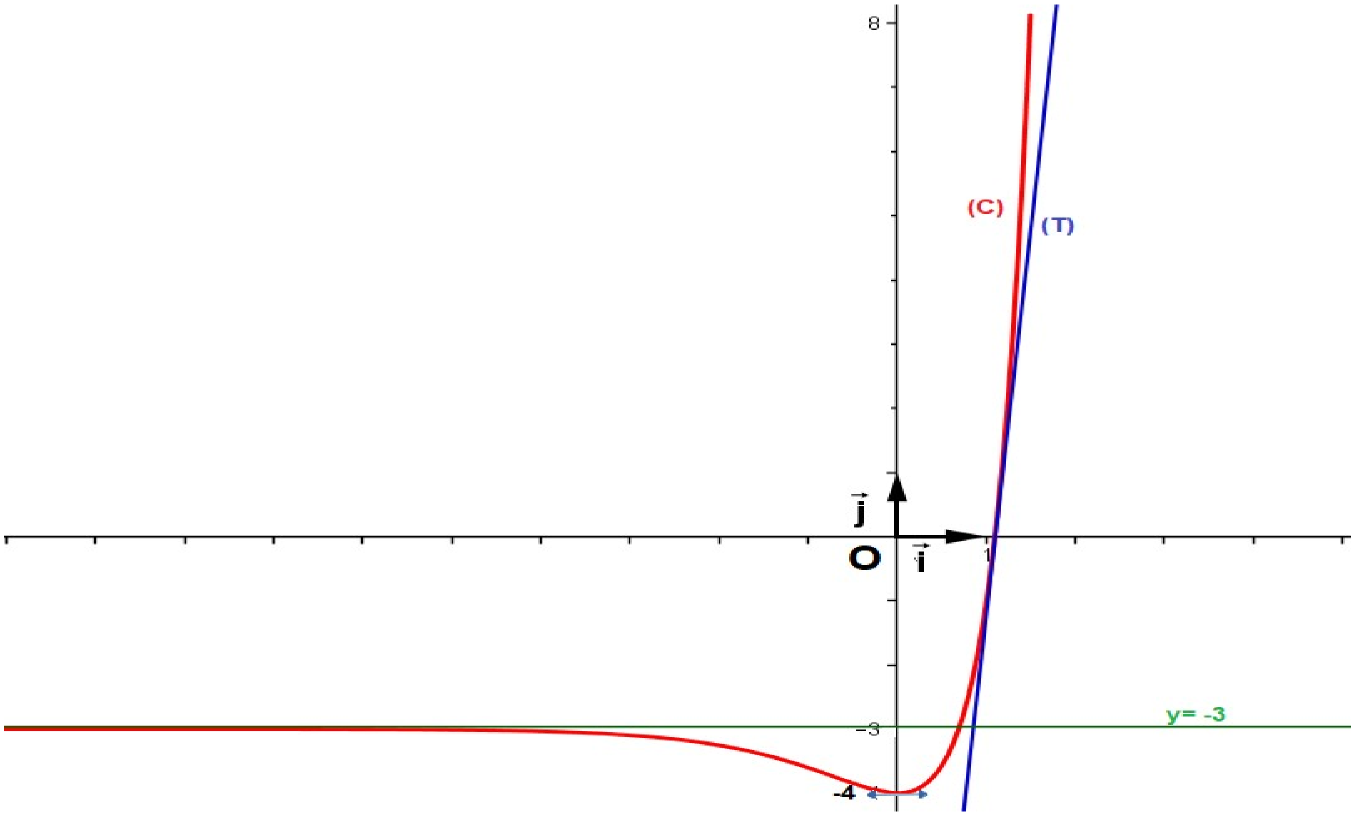
$x_0=\ln 3$ est l'abscisse du point A intersection de (C) avec l'axe des abscisses, donc $f(\ln 3)=0$

$f'(x)=2(e^{x})^{2}-2e^{x}=2e^{x}(e^{x}-1)$, donc $f'(\ln 3)=2e^{\ln 3}(e^{\ln 3}-1)=2.3(3-1)=12$.

L'équation de la tangente en $x_0=\ln 3$ est donc y=12(x-ln3)+12

(T) : y = 12 x – 12 ln 3 +12

6.- Courbe



Pour A2 seulement

7.- F est la fonction définie par $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{x}-3x$.

a) F est une primitive de f si F'(x) = f(x) quel que soit x appartenant à IR.

$$F'(x)=\frac{1}{2}.2.e^{2x}-2e^{x}-3$$

$$F'(x)=e^{2x}-2e^{x}-3=f(x)$$

Ainsi F est une primitive de f sur IR.

b) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1 est |F(1) – F(0)| . u.a

1 u.a = 1.1 cm²= 1 cm²

$F(1)=\frac{1}{2}e^{2}-2e^{1}-3$ donc $F(1)=\frac{1}{2}\cdot 7,3-2\cdot 2,7-3$, ainsi F(1)= -5 ,75

$F(0)=\frac{1}{2}e^{2.0}-2e^{0}-3.0$, ainsi $F(0)=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$

$$F(1)-F(0)=-2,5-(-\frac{3}{2})=-2,5+\frac{3}{2}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1 est $\mathcal{A}=$ 3,25 cm².