

## Chapitre 8 - Cisaillement simple - Cisaillement de flexion Etude de l'effort tranchant

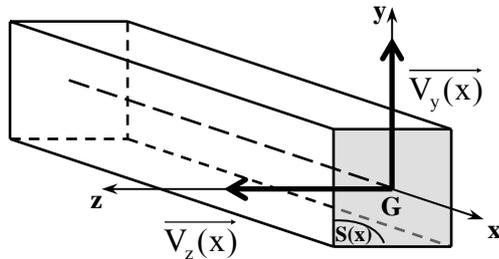
### SOMMAIRE

<b><i>I - Etude du cisaillement simple.....</i></b>	<b>89</b>
<b>1°/ Sollicitation étudiée : l'effort tranchant. ....</b>	<b>89</b>
<b>2°/ Essai de cisaillement - Loi de comportement du matériau. ....</b>	<b>89</b>
<b>3°/ Contrainte de cisaillement simple. ....</b>	<b>90</b>
3.1 - Définition .....	90
3.2 - Répartition de la contrainte de cisaillement simple. ....	91
<b><i>II - Etude du cisaillement de flexion. ....</i></b>	<b>91</b>
<b>1°/ Sollicitation étudiée : effort tranchant concomitant à un moment fléchissant. ....</b>	<b>91</b>
<b>2°/ Loi de réciprocité des contraintes de cisaillement .....</b>	<b>91</b>
<b>3°/ Expression et répartition des contraintes de cisaillement de flexion. ....</b>	<b>92</b>
3.1 - Calcul de la contrainte tangentielle $\tau$ .....	92
3.2 - Calcul de la valeur maximum de la contrainte tangentielle $\tau_{\max}$ pour une section rectangulaire.....	94
3.3 - Section réduite.....	94
<b><i>III - Condition de résistance .....</i></b>	<b>95</b>

**I - ETUDE DU CISAILLEMENT SIMPLE.**

**1°/ Sollicitation étudiée : l'effort tranchant.**

On considérera qu'une section droite de poutre est soumise à un effort tranchant lorsque les éléments de réduction des efforts internes de cohésion se ramènent à la seule sollicitation V.

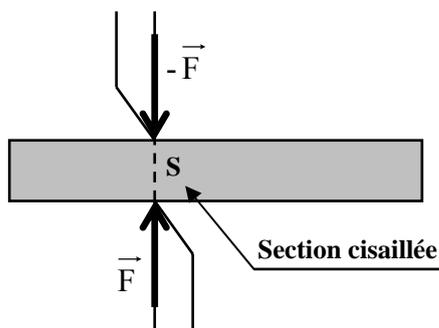


$N(x) = 0$	$T(x) = 0$
$V_y(x) \neq 0$	$M_{fy}(x) = 0$
et/ou $V_z(x) \neq 0$	$M_{fz}(x) = 0$

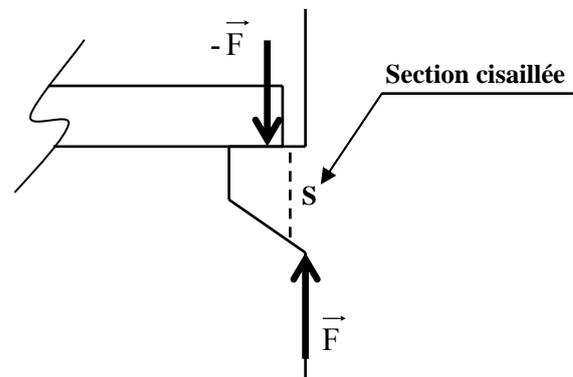
Torseur des efforts internes de cohésion :  $\{\tau(2/1)\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_y(x) & 0 \\ V_z(x) & 0 \end{Bmatrix}$

Exemples d'éléments soumis à un effort tranchant :

⇒ Fil de fer que l'on tente de sectionner



⇒ Poutre appuyée sur un corbeau

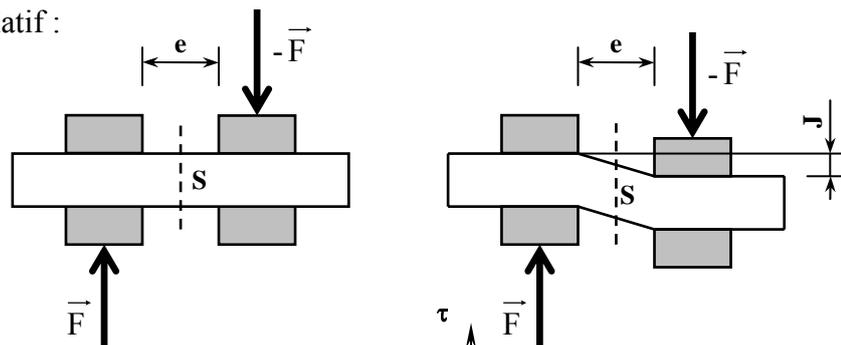


**2°/ Essai de cisaillement - Loi de comportement du matériau.**

Sans entrer dans les détails, les notions acquises pour l'effort normal peuvent être transposées à l'effort tranchant. En effet, lors d'un essai de cisaillement on observe :

- un déplacement relatif :

$$\gamma = \frac{J}{e}$$



- une zone de déformation élastique OA (droite de pente G),
- une zone de déformation plastique AR.
- La contrainte de cisaillement est représentée par  $\tau$ , telle que, dans la zone de déformation élastique :

$$\tau = G \cdot \frac{J}{e}$$

(loi de Hooke pour le cisaillement).

**G** est appelé **module d'élasticité transversal**, en MPa.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec  $E$  : module d'élasticité longitudinal

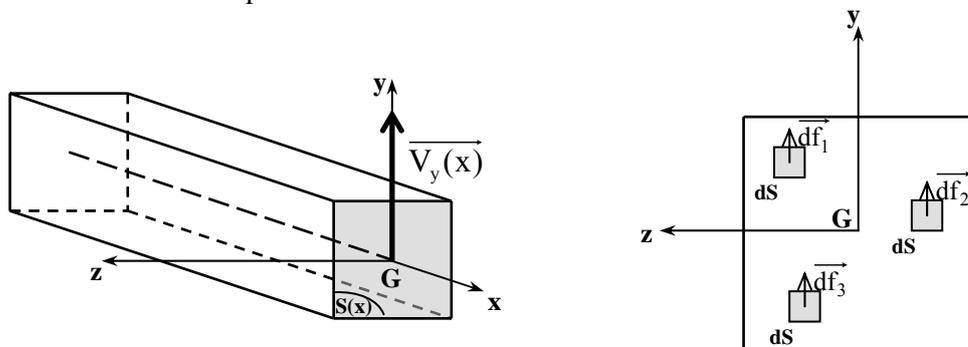
et  $\nu$  : coefficient de Poisson

*Attention :* contrairement au cas de la compression ou de la traction simple (où la contrainte normale  $\sigma$  est uniformément répartie dans la section droite), **la contrainte de cisaillement  $\tau$  n'est pas a priori uniformément répartie dans la section.**

### 3°/ Contrainte de cisaillement simple.

#### 3.1 - Définition

Soit une section droite par laquelle nous isolons la partie gauche d'une poutre. Supposons que la seule sollicitation à laquelle soit soumise cette section droite est un effort tranchant  $V_y$ .



Chaque surface élémentaire  $dS$  subit une force d'intensité  $df$  due à l'action du tronçon de droite sur le tronçon de gauche.

Les forces  $\vec{df}_i$  sont tangentes à  $S$  étant donné que la section n'est soumise qu'à un effort de cisaillement (il n'y a pas de force normale à  $S$ , donc pas de contrainte normale  $\sigma$ ).

Chaque force qui s'applique sur une surface  $dS$  permet de définir une contrainte tangentielle ou contrainte de cisaillement :  $\tau = \frac{df_i}{dS}$  en MPa.

#### 3.2 - Répartition de la contrainte de cisaillement simple.

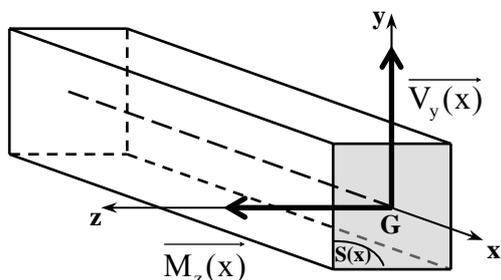
En **cisaillement simple**, on peut considérer que la répartition des contraintes de cisaillement est uniforme dans la section :  $\tau = \frac{V}{S}$

*Attention : ce n'est pas le cas en cisaillement de flexion* (effort tranchant concomitant à un moment fléchissant). C'est ce que nous allons voir dans la suite du chapitre.

**II - ETUDE DU CISAILLEMENT DE FLEXION.**

**1°/ Sollicitation étudiée : effort tranchant concomitant à un moment fléchissant.**

Une section droite de poutre travaillant en flexion est soumise à un effort tranchant et un moment fléchissant :



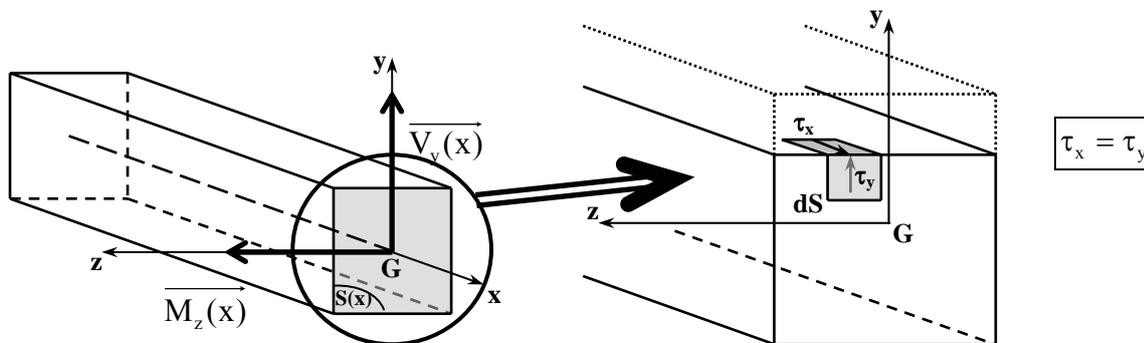
$N(x) = 0$	$T(x) = 0$
$V_y(x) \neq 0$	$M_{fy}(x) = 0$
$V_z(x) = 0$	$M_{fz}(x) \neq 0$

Torseur des efforts internes de cohésion :  $\{\tau(2/1)\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V_y(x) & 0 \\ 0 & M_z(x) \end{Bmatrix}$

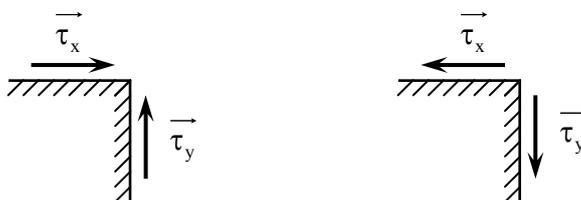
**2°/ Loi de réciprocité des contraintes de cisaillement**

Pour comprendre le comportement des matériaux soumis au cisaillement, il faut connaître (admettre) la loi simple suivante (théorème de réciprocité de Cauchy) :

*Lorsqu'il existe en un point une contrainte de cisaillement  $\tau$  dans un plan d'un élément, il existe la même contrainte  $\tau$  dans le plan perpendiculaire.*



Sur un petit élément de poutre isolé, les vecteurs contrainte tangentielle longitudinale  $\tau_x$  et contrainte tangentielle transversale  $\tau_y$  doivent être disposés symétriquement par rapport à l'arête des facettes et il y a donc deux orientations possibles :

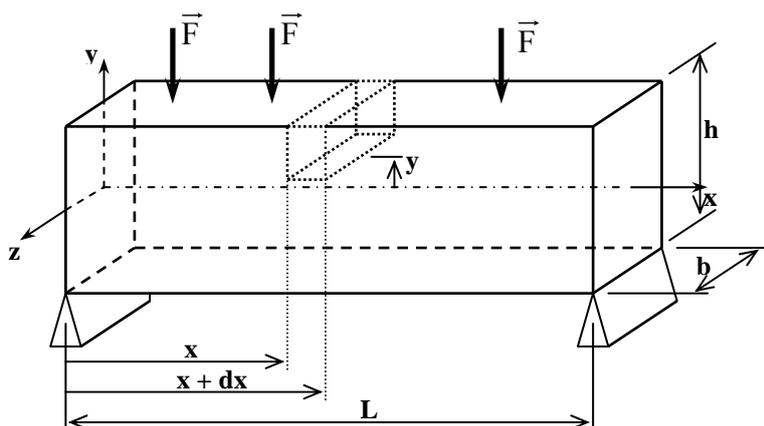


Cette propriété a un intérêt notamment quand la contrainte de cisaillement limite (admissible) du matériau n'est pas la même dans le sens longitudinal et dans le plan transversal. C'est le cas par exemple des poutres en bois lamellé-collé.

**3°/ Expression et répartition des contraintes de cisaillement de flexion.**

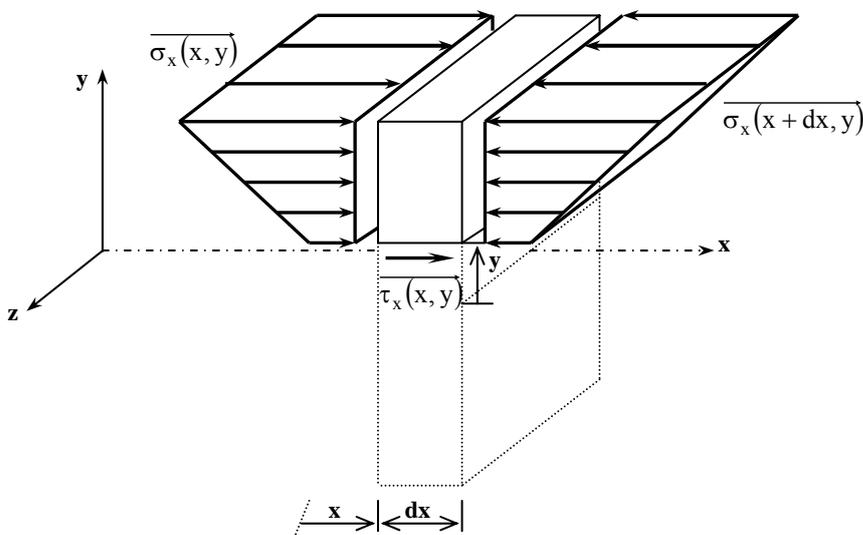
**3.1 - Calcul de la contrainte tangentielle  $\tau$ .**

On détermine l'expression de la contrainte tangentielle longitudinale  $\tau_x$  :



Soit une poutre droite de longueur L, de largeur b et de hauteur h soumise à des actions extérieures.

On isole un petit élément de poutre situé entre les abscisses x et x + dx (la face intérieure de cet élément se trouve à l'ordonnée y.) et on reporte sur cet élément isolé l'ensemble des contraintes dont la projection sur l'axe x est non nulle.



A l'équilibre, la somme des forces exercées sur cet élément est égale à zéro. En projection sur  $x$ , cela donne :

$$\tau_x(x, y) \cdot b \cdot dx + \int_y^{h/2} \sigma_x(x, y) \cdot dS - \int_y^{h/2} \sigma_x(x + dx, y) \cdot dS = 0 \quad (1)$$

On connaît l'expression des contraintes normales de flexion :

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \cdot y$$

On remplace cette expression dans l'équation (1) :

$$\Rightarrow \tau_x(x, y) \cdot b \cdot dx - \frac{M_z(x)}{I_{Gz}} \cdot \int_y^{h/2} y \cdot dS + \frac{M_z(x + dx)}{I_{Gz}} \cdot \int_y^{h/2} y \cdot dS = 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_x(x, y) = -\frac{M_z(x + dx) - M_z(x)}{dx} \cdot \frac{1}{b \cdot I_{Gz}} \cdot \int_y^{h/2} y \cdot dS$$

$$\Leftrightarrow \tau_x(x, y) = -\frac{dM_z(x)}{dx} \cdot \frac{1}{b \cdot I_{Gz}} \cdot \int_y^{h/2} y \cdot dS$$

$\Rightarrow$  on reconnaît l'expression du moment statique par rapport à l'axe  $Gz$  de la surface située au dessus de l'ordonnée  $y$  :  $W_{Gz}(y) = \int_y^{h/2} y \cdot dS$

$\Rightarrow$  et on connaît la relation qui lie le moment fléchissant à l'effort tranchant :

$$V(x) = -\frac{dM_z(x)}{dx}$$

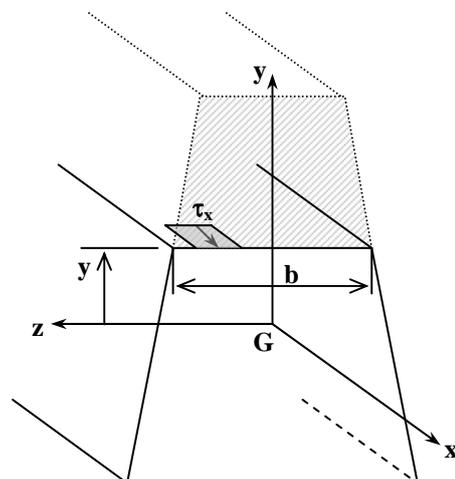
$\Rightarrow$  finalement, on obtient pour la contrainte tangentielle longitudinale l'expression suivante :

$$\tau(y) = \frac{V_y \cdot W_{Gz}(y)}{b \cdot I_{Gz}}$$

**Pour une section droite de largeur  $b$  variable :**

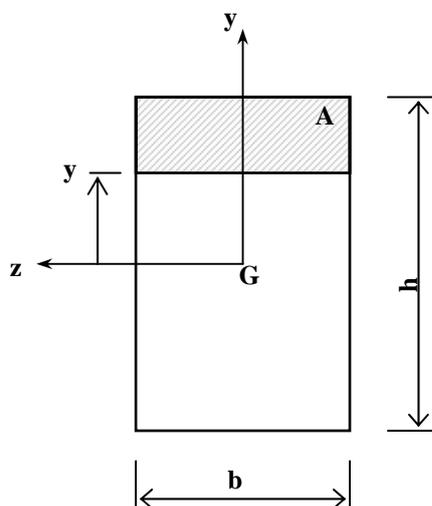
$\Rightarrow$  on peut considérer que la contrainte de cisaillement est constante parallèlement à l'axe  $z$  (sur toute la largeur  $b$  pour  $y$  donné). Elle ne varie qu'en fonction de  $y$ .

$$\tau(y) = \frac{V_y \cdot W_{Gz}(y)}{I_{Gz} \cdot b(y)}$$



### 3.2 - Calcul de la valeur maximum de la contrainte tangentielle $\tau_{\max}$ pour une section rectangulaire

Pour une section rectangulaire, on peut exprimer la valeur de la contrainte en fonction de l'ordonnée  $y$  :



$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_{Gz}(A) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right)$$

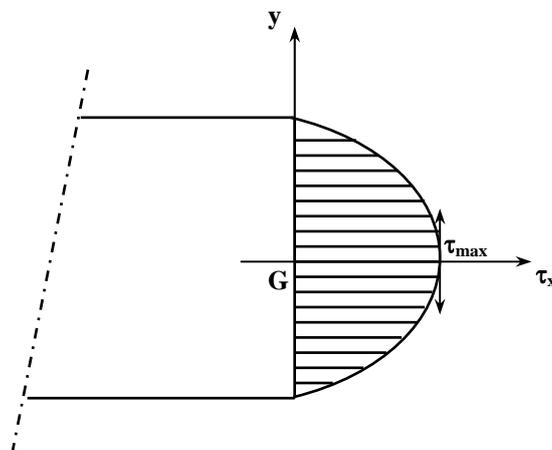
$$\text{d'où : } \tau(y) = \frac{6 \cdot V_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

C'est l'équation d'une parabole.

$\tau$  est maximum pour  $y = 0$

$$\tau = 0 \text{ pour } y = \pm \frac{h}{2}$$

### Répartition des contraintes $\tau_x$ dans une section rectangulaire :



### 3.3 - Section réduite.

On appelle section réduite  $A_r$  (ou  $A_v$ ) la valeur minimale du rapport :  $\frac{I_{Gz} \cdot b(y)}{W_{Gz}(A)}$

Cette valeur (que l'on retrouve dans les tableaux des profilés commerciaux) permet de calculer rapidement la contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{\max} = \frac{V_y}{A_r}$$

Contrainte de cisaillement maximale pour des sections courantes :

<p><b>Section rectangulaire :</b></p> $A_r = \frac{2A}{3} ; \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_y}{A}$	<p><b>Section circulaire</b></p> $A_r = \frac{3A}{4} ; \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{V_y}{A}$	<p><b>Section en I</b></p> $A_r \approx A_{\text{âme}} ; \tau_{\max} \approx \frac{V_y}{A_{\text{âme}}}$
--	---	--

### III - CONDITION DE RESISTANCE

Comme pour la traction ou la compression, on définit une contrainte limite (admissible) de cisaillement  $\bar{\tau}$  qui ne doit être dépassée en aucun point de la structure.

Par contre le concepteur n'a, en général, pas à se soucier de la déformation due au cisaillement qui est très faible.

On retiendra donc pour le dimensionnement une seule inéquation :

$$\tau_{\max} \leq \bar{\tau}$$

Quelques ordres de grandeurs pour  $\bar{\tau}$  :

- Acier : 100 MPa
- Bois résineux longitudinalement aux fibres : 1,2 MPa
- Bois résineux perpendiculairement aux fibres : 1,5 MPa

Pour le béton, la résistance au cisaillement est très faible, ce qui explique que l'on ne fasse pas travailler ce matériau au cisaillement. Pour le béton armé, c'est l'ensemble béton+acier q