Chapitre 10 - Le flambement

SOMMAIRE

I - QU'EST-CE QUE LE FLAMBEMENT ?

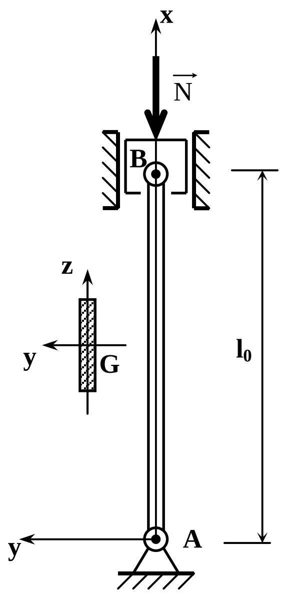
Le flambement est en fait une sollicitation composée de compression et de flexion, mais dont l'étude est différente de la flexion composée parce que les méthodes sont différentes et que le flambement est un phénomène rapidement destructif. En effet, dans le cas du flambement, les déformations ne peuvent plus être supposées infiniment petites et négligées comme dans les chapitres précédents. De même, les forces extérieures ne sont plus proportionnelles aux déformations et, dans certains cas, de grandes déformations peuvent être causées par des accroissements de charge infimes. Tous ces phénomènes sont connus sous le nom d'instabilité élastique. Le risque de flambement d'un élément étant lié aux dimensions de cet élément, on dit que **le flambement est un phénomène d'instabilité de forme**.

II - MISE EN EVIDENCE DU FLAMBEMENT

Considérons une pièce **élancée** (telle que sa longueur soit très supérieure à sa plus grande dimension transversale), de ligne moyenne rectiligne, de section droite constante, articulée à ses deux extrémités, et soumettons la à un **effort normal de compression centré**.

On observe successivement deux types de sollicitation :

- pour un effort N inférieur à une limite N_c, la poutre est comprimée, elle reste rectiligne et se raccourcit.
- Lorsque N atteint N_c, la poutre fléchit brusquement et se rompt très vite. On observe que la flexion se produit dans le **plan perpendiculaire à la direction de plus faible moment quadratique** de la section de la poutre. Pour le schéma ci-contre par exemple, la flexion se produit dans le plan (A, x, y), perpendiculaire à (G, z) (rotation de la poutre autour de l'axe z).



La valeur $\mathbf{N_c}$ (ou F_c) de l'effort de compression à partir de laquelle se produit le flambement s'appelle **charge critique d'Euler**.

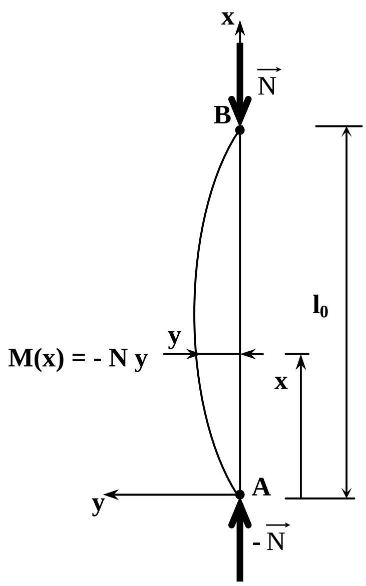
III - CHARGE CRITIQUE D'EULER N_C

Modélisons la poutre par sa ligne moyenne AB et supposons que sous l'influence des efforts en A et B, cette ligne moyenne prenne une très légère courbure (accentuée sur le schéma ci-contre)

Si x et y sont les coordonnées d'un point courant G de la fibre moyenne, y est la déformée de cette fibre.

Habituellement, en ce qui concerne l'équilibre statique, on considère que les déformations sont petites et que la fibre moyenne n'a pas bougé après déformation. Dans ce qui suit, nous allons au contraire prendre en compte l'influence des déformations sur l'équilibre statique et considérer le moment secondaire qu'elles provoquent. Ce moment de flexion dans la section vaut :

$$\boxed{M_z(x) = -N \cdot y}$$



Utilisons la formule vue au chapitre sur la flexion :

$$EI_{Gz}y'' = M_z(x) \quad \Leftrightarrow EI_{Gz}y'' - M_z(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow EI_{Gz}y'' + N\,y = 0$$
$$\Leftrightarrow y'' + \frac{N}{EI_{Gz}}\,y = 0$$ équation différentielle du $2^{ème}$ ordre.

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$\mathbf{y = A\cos\omega x + B\sin\omega x} \qquad \text{avec } \omega^2 = \frac{N}{EI_{Gz}} \quad (1)$$

Détermination des constantes avec les conditions aux limites :

Pour $x = 0$, $y(0) = 0$; donc $A = 0$

Pour $x = l_0$, $y(l_0) = 0$; donc $B \sin \omega x = 0$

A étant nul, il est évident que $B \neq 0$ (sinon pas de flambement),

$\Rightarrow \sin \omega\, l_0 = 0$

$\Leftrightarrow \omega\, l_0 = n\,\pi$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$

$n = 1$ 1^{er} mode de flambement $\Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{l_0}$ (2)

Equation de la déformée ; $y(x) = B\sin\left(\dfrac{\pi x}{l_0}\right)$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\pi^2}{l_0^2} = \frac{N}{EI_{Gz}}$$

La résolution de cette équation permet de trouver N provoquant la déformée, c'est-à-dire la **charge critique d'Euler N_c** au-delà de laquelle le flambement se produit :

$$\boxed{N_c = \frac{\pi^2 EI_{Gz}}{l_0^2}}$$

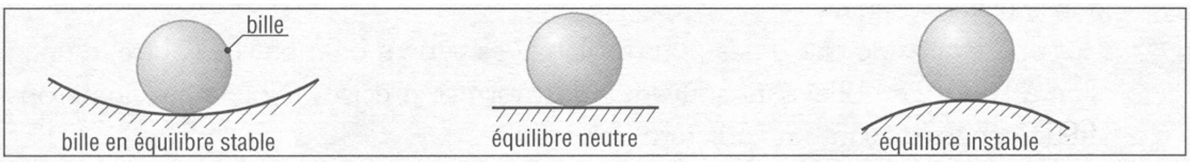
dans le cas de la poutre bi-articulée étudiée ($l_f = l_0$ - voir paragraphe suivant)
et I_{Gz} le moment quadratique le plus faible (ce n'est pas toujours le cas)

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

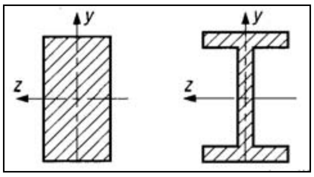
- $N < N_c$: compression simple, la poutre reste droite, elle est dite en équilibre stable.

- $N = N_c$: la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche égale à B, elle est dite en équilibre neutre. A noter que $B = y_{maxi}$ est en général petit.

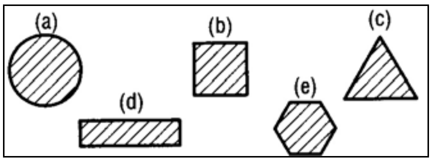
- $N > N_c$: il y a instabilité en position droite (équilibre instable) avec une forte tendance au flambement. B augmentera très rapidement avec un léger accroissement de N.



<u>Remarques :</u>



- Le flambement se produit suivant un axe perpendiculaire à l'axe du moment quadratique le plus faible. Pour les deux sections représentées, Iy < Iz, le flambement se produit dans le plan (x, z).

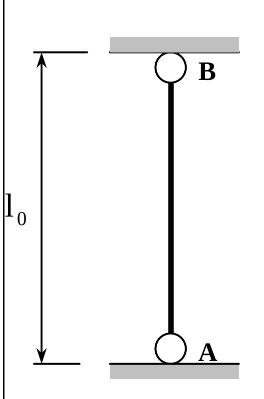
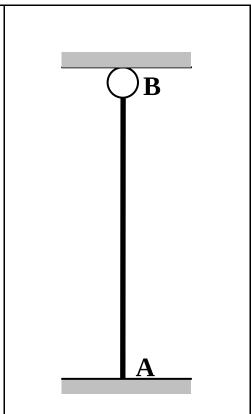
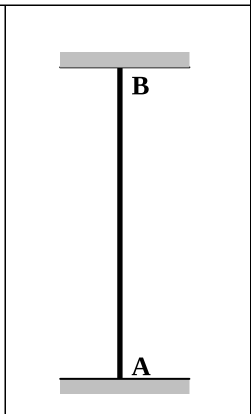
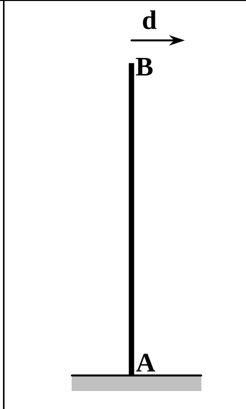
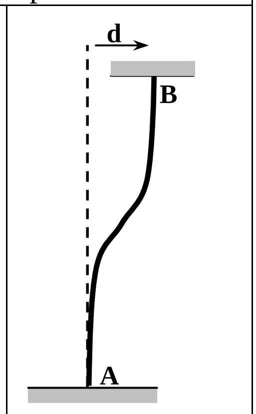


- Pour les cinq sections représentées, toutes de même aire, celle du triangle équilatéral (c) est celle qui résiste le mieux au flambement (21% plus résistante que la section circulaire).

IV - INFLUENCE DES LIAISONS AUX APPUIS

On peut généraliser les résultats établis pour la poutre bi-articulée pour des poutres dont les conditions d'appuis sont différentes. L'expression générale de la charge critique d'Euler est :

$$\boxed{N_c = \frac{\pi^2 E I_{Gz ou y}}{l_f^{\,2}}} \qquad \text{avec } l_f : \text{longueur de flambement}$$

Longueur de flambement l_f en fonction des liaisons aux appuis				
A et B sont sur la même verticale			Déplacement de B en tête de poteau	
				
$l_f = l_0$	$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} l_0$	$l_f = \frac{l_0}{2}$	$l_f = 2 l_0$	$l_f = l_0$

Il faut en pratique envisager l_{fy} et l_{fz} pour déterminer les conditions de flambement dans les deux directions.

V - CONTRAINTE CRITIQUE D'EULER

A la force critique d'Euler N_c correspond une **contrainte critique**, qui peut prendre le nom de contrainte critique limite ou admissible, donnant un élément de sécurité vis-à-vis du flambement.

Pour une poutre comprimée de section S, la **contrainte critique σ_c** est définie par la relation : $$\boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 E I_{Gz\,ou\,y}}{l_f^{\,2} \cdot S}}$$

on sait que $i_{z\,ou\,y} = \sqrt{\dfrac{I_{Gz\,ou\,y}}{S}}$ le rayon de giration,

et on définit une nouvelle grandeur : $\lambda_{z\,ou\,y} = \dfrac{l_{fz\,ou\,y}}{i_{z\,ou\,y}}$ **l'élancement** (sans unité)

La contrainte critique s'exprime alors sous la forme : $$\boxed{\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}} \qquad (1)$$

Supposons que la poutre soit parfaitement rectiligne, que l'effort N soit centré et que le matériau soit parfaitement homogène. Soit $\sigma = \dfrac{N}{S}$ la contrainte dans la poutre :

- si $\sigma_c < \sigma_e$ (limite élastique) : il y aura ruine par flambement dès que σ atteindra la valeur σ_c.
- si $\sigma_c > \sigma_e$: la poutre périra par écrasement (ou compression simple sans flambement) dès que σ atteindra la valeur σ_e. Dans ce cas, il n'y a aucun risque de flambement. Le dimensionnement se fait en compression simple.

Attention : ce raisonnement n'est plus valable en flexion composée (si la poutre a un défaut de rectitude ou si N n'est pas bien centré,…). Le flambement surviendra dans ce cas avant que σ n'atteigne σ_c.

La relation (1) fait apparaître la notion d'élancement critique (pour $\sigma_c = \sigma_e$), à partir duquel la poutre devra être calculée au flambement :

$$\boxed{\lambda_c = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}}$$

Notons que cette valeur de l'élancement critique ne dépend que des caractéristiques mécaniques du matériau.

VI - DIMENSIONNEMENT ET VERIFICATION DES SECTIONS

Les conditions réelles de liaisons sont différentes des modèles théoriques et varient selon les matériaux ; c'est pourquoi les différents règlements de calcul (acier, bois, béton armé, béton précontraint) adaptent la théorie d'Euler à ses particularités pour chaque matériau.

$\Rightarrow$ Voir les cours correspondants (BA, …)