

5. Calcul des Aciers Transversaux

5.1 Etat des contraintes dans une poutre en flexion simple

Rappels de RdM :

Etudions une poutre en flexion simple, soumise à une charge uniformément répartie. Pour un point donné de la poutre, et pour une facette en ce point, l'état de contrainte est représenté par un couple (σ, τ) de contraintes normale σ et de cisaillement τ (ou contrainte tangente).

Cet état de contraintes admet des directions particulières de contraintes qu'on appelle contraintes principales. Les directions des contraintes principales de traction et de compression permettent de tracer les trajectoires des contraintes ou isostatiques. Ce sont les lignes suivant lesquelles s'exercent les plus fortes contraintes de traction et de compression.

On comprend ainsi qu'il est nécessaire d'armer le béton suivant les directions des contraintes principales de traction. Dans la pratique la poutre est armée par un réseau d'armatures longitudinales qui reprend les contraintes normales et un réseau d'armatures transversales qui reprend la traction induite par les contraintes de cisaillement.

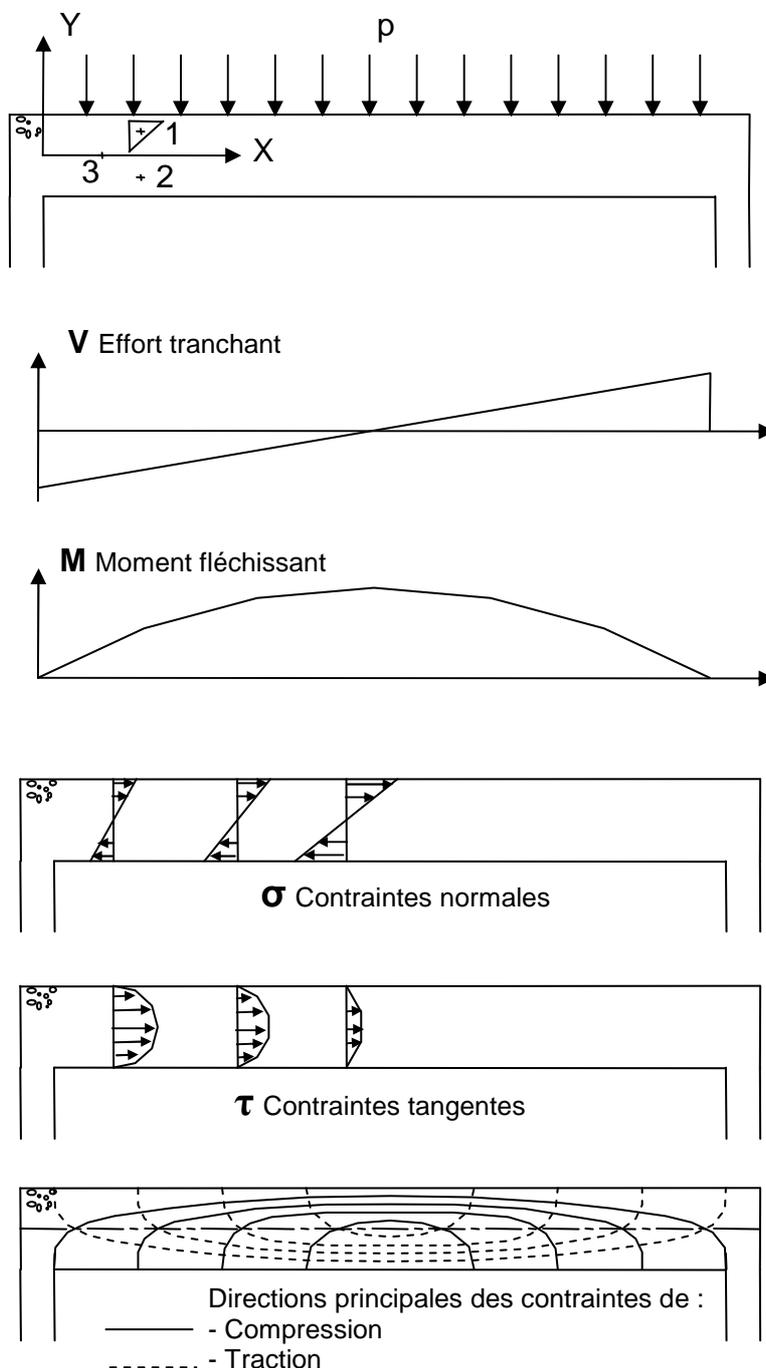
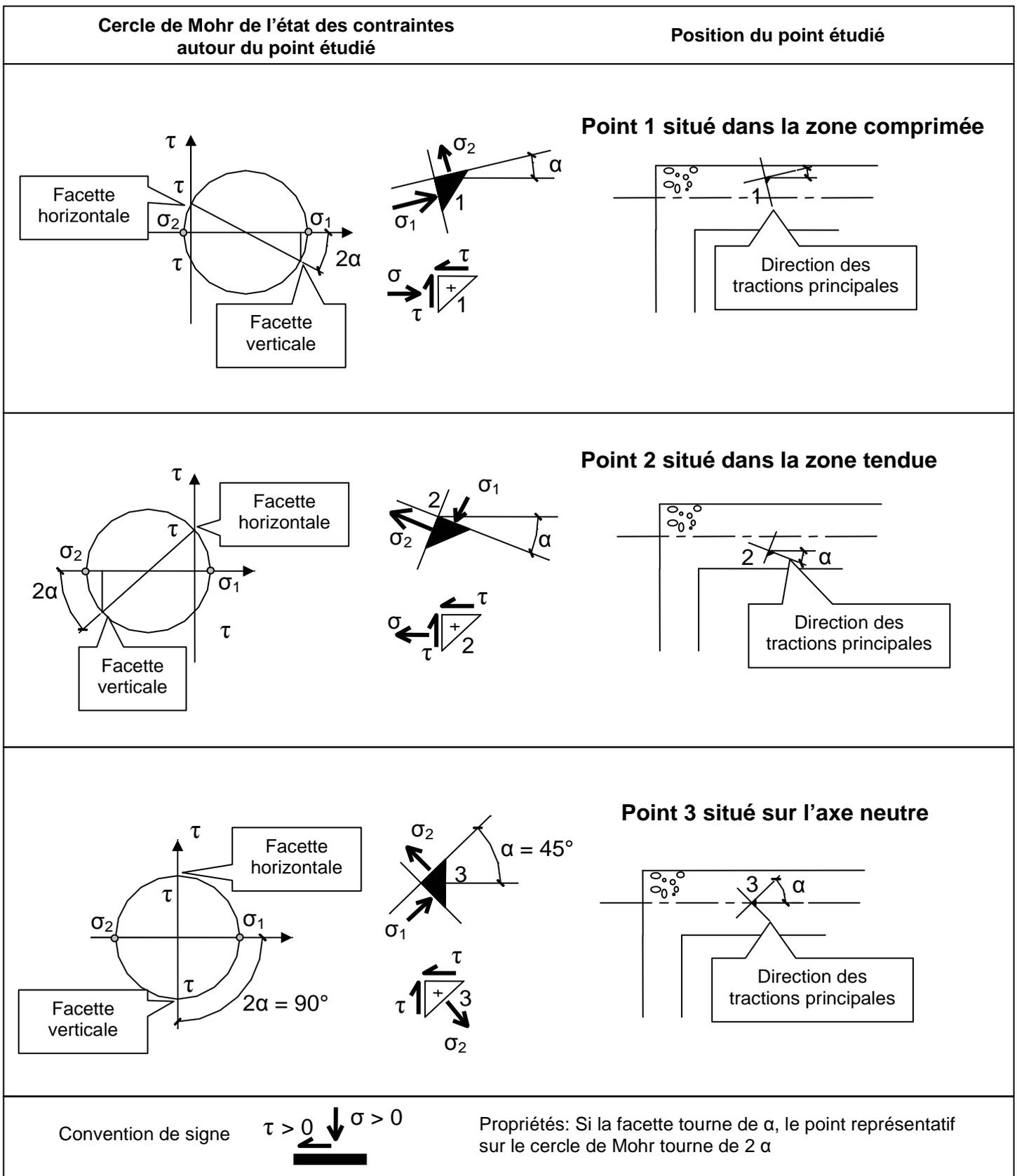


Fig.5.1 Charges, sollicitations et contraintes

Fig.5.2. Rappels de Rdm. Analyse des contraintes autour de 3 points de la poutre



Les diagrammes de contraintes normales et tangentés des figures précédentes sont modifiés dans le cas d'une poutre en béton armé. On néglige en effet la résistance en traction du béton.

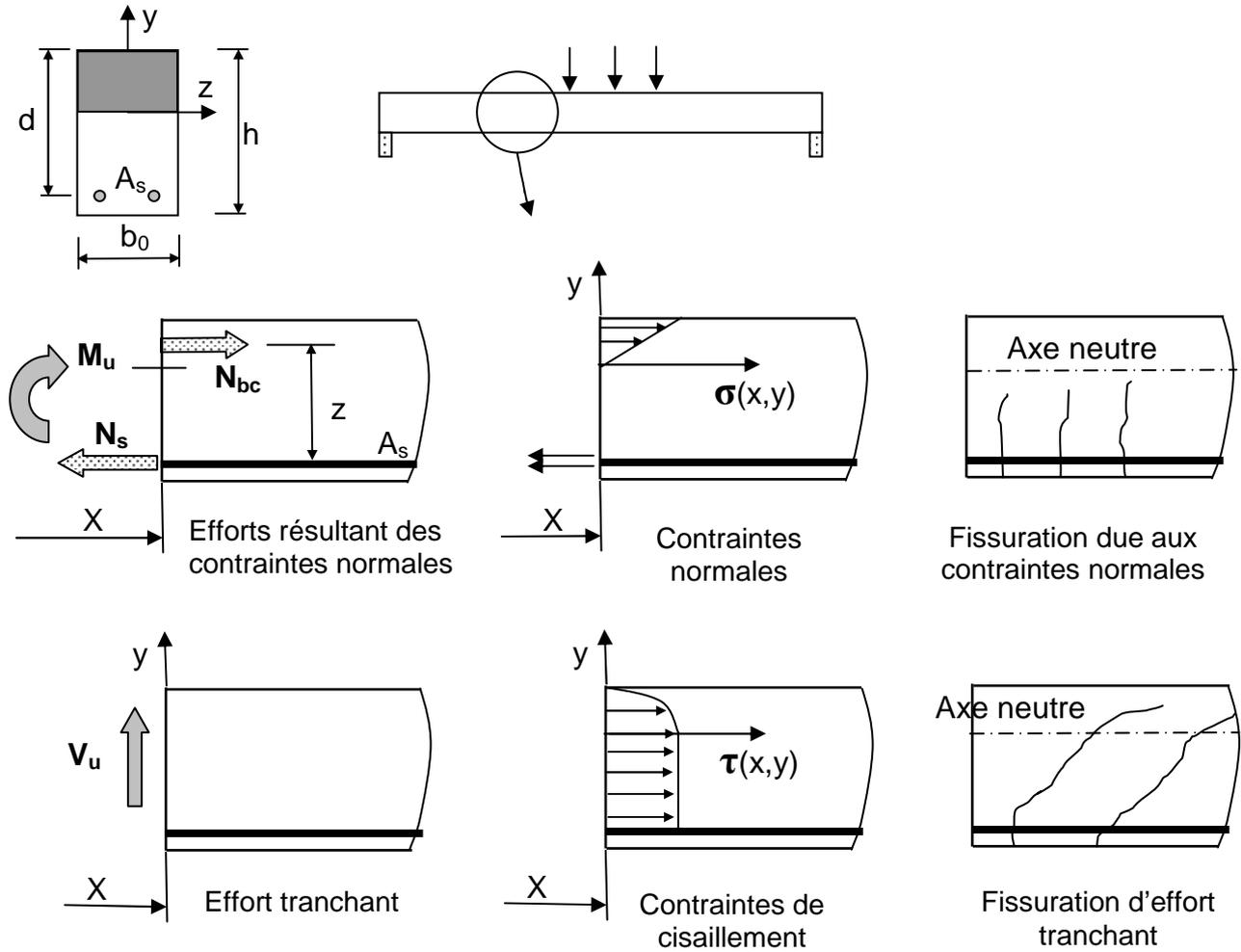


Fig.5.3 Sollicitations, contraintes, fissurations

Cette fissure est l'amorce d'une rupture qui séparerait la poutre en deux parties. Il est donc nécessaire de couder la fissure par plusieurs cours d'armatures.

5.2 Calcul des contraintes tangentés

D'après le cours de RdM : $\tau(x,y) = V_u(x) \cdot S(y) / [b(y) \cdot I_{gz}]$

- avec $\tau(x,y)$ La contrainte tangente régnant à l'abscisse x de la poutre et à l'ordonnée y de la section
- $V_u(x)$ L'effort tranchant à l'ELU à l'abscisse x de la poutre
- $S(y)$ Le moment statique de la section au dessus de y et par rapport à Gz
- $b(y)$ La largeur à l'ordonnée y de la section d'abscisse x
- I_{gz} Le moment quadratique (dit d'inertie) de la section homogène réduite

Remarque.

Dans une section d'abscisse x , $\tau(x,y)$ varie comme $S(y)$:

Dans un premier temps $S(y)$ varie de 0 à τ_{max} , puis $S(y)$ est constant puisque le béton tendu est négligé enfin $S(y)$ est nul puisque le moment statique du béton comprimé est égal et opposé à celui des aciers tendus.

Calcul de la contrainte tangente maxi.

$$\tau_{u \max}(x) = V_u(x) \cdot S_G / [b \cdot I_{gz}]$$

$$S_G = b \cdot y_g^2 / 2 = nA(d - y_g)$$

$$\sigma_S = n \cdot M(d - y_g) / I_{gz} \text{ avec } n \text{ coefficient d'équivalence acier béton (voir chapitre sur l'ELS)}$$

$$M = z \cdot N_s = z \cdot A \cdot \sigma_S$$

$$\text{D'où } z = M / A \cdot \sigma_S = M / [A \cdot n \cdot M(d - y_g) / I_{gz}] = I_{gz} / S_G$$

$$\text{Soit } \tau_{u \max}(x) = V_u(x) / [b \cdot z]$$

Par ailleurs le règlement définit une **contrainte tangente conventionnelle**.

$$\tau_u(x) = V_u(x) / [b \cdot d] \text{ avec } d = 0,9h \text{ en général}$$

Le règlement donne une valeur limite à τ_u . Il faut donc vérifier que : $\tau_{u \max} = V_{u \max} / [b \cdot d] < \tau_{u \text{ limite}}$

Avec $\tau_{u \text{ limite}}$ défini dans le tableau ci-joint :

$\tau_{u \text{ limite}}$ [MPa]	Fissuration peu préjudiciable	Fissuration préjudiciable ou très préjudiciable
Cadre droit	Min [0,2.f _{ct} /γ _b ; 5]	Min [0,15.f _{ct} /γ _b ; 4]
Cadre à 45°	Min [0,27.f _{ct} /γ _b ; 7]	Min [0,27.f _{ct} /γ _b ; 7]
Cadre à 22,5°	Min [0,235.f _{ct} /γ _b ; 6]	Min [0,21.f _{ct} /γ _b ; 5,5]

On remarque que les cadres inclinés sont plus efficaces (Voir le paragraphe 1).

Exemple : Valeur de $\tau_{u \text{ limite}}$ à l'ELU normal si f _{c28} = 30 MPa		
	Fissuration peu préjudiciable	Fiss. préjudiciable ou très préjudiciable
Cadre droit	4 MPa	3 MPa

5.3 Calcul des armatures transversales

Nous venons de voir la nécessité de coudrer les fissures par des armatures.
Ce que précise l'Article A 5.1,22. du BAEL 91 :

"Toute âme de poutre comporte une armature transversale composée d'aciers parallèles au plan moyen de l'âme et ancrés efficacement dans les deux membrures. Ces aciers font avec l'axe longitudinal de la poutre un angle α compris entre 45 et 90°, leur inclinaison étant de même sens que celle de la contrainte principale de traction au niveau du centre de gravité de la section de la poutre supposée non fissurée."

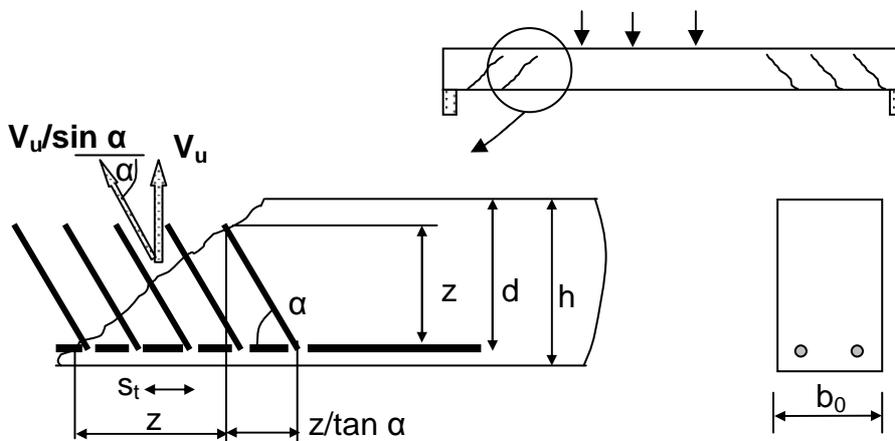


Fig.5.5 Couture d'une fissure d'effort tranchant

Soit m le nombre de cours de section A_t travaillant à ost pour équilibrer un effort global $V_u(x)/\sin \alpha$

$$m = z \cdot (1 + 1/\tan \alpha) / s_t \quad \text{et} \quad m \cdot A_t \cdot \sigma_{st} = V_u(x) / \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad A_t = \frac{s_t V_u(x)}{z \cdot \sigma_{st} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad [1]$$

D'autre part pour que la couture soit efficace, il faut limiter supérieurement l'espacement s_t des armatures. Voyons les dispositions réglementaires et la forme de l'équation [1] dans l'article A 5.1,23.

Reprenons l'expression [1] en considérant que:

$$\sigma_{st} = \frac{f_e}{\gamma_s} \quad \text{et} \quad \tau_u = \frac{V_u}{b_0 d} \quad \text{d'où} \quad A_t = \frac{s_t \cdot \tau_u \cdot b_0 \cdot d}{z \cdot \frac{f_e}{\gamma_s} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{soit} \quad \frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} = \frac{\gamma_s \cdot \tau_u}{z \cdot f_e \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

Le règlement considère à juste titre que $z = 0,9 \cdot d$. D'autre part le béton équilibre une partie de l'effort tranchant du fait que sa résistance à la traction n'est pas nulle un terme $0,3 \cdot f_{tj} \cdot k$ est introduit dans la formule réglementaire. Cette portion d'effort tranchant équilibrée par le matériau béton est d'autant plus grande que celui-ci est comprimé. Elle n'est effective que s'il n'y a pas de reprise de bétonnage non traitée.

La formule réglementaire est en fait:

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot s_t} = \frac{\gamma_s \cdot [\tau_u - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k]}{0,9 \cdot f_e \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{avec } f_{tj} \leq 3,3 \text{ MPa et } k = 0 \text{ ou } 1 \text{ en flexion simple}$$

A_t	m^2	Section globale d'un cours d'armatures transversales
b_0	m	Largeur de la poutre
τ_u	MPa	Contrainte tangente conventionnelle
f_{tj}	MPa	Contrainte de rupture en traction du béton
f_e	MPa	Limite élastique de l'acier
γ_s	/	Coefficient de sécurité partiel sur l'acier (1,15 à l'ELU normal)
k	/	- $k = 1$ s'il n'y pas de reprise de bétonnage ou si celle-ci est traitée - $k = 0$ s'il y a une reprise de bétonnage non traitée - k peut être > 1 ou < 0 dans les cas de flexion composée (voir A 5.1,23)

La valeur de s_t est limitée réglementairement:

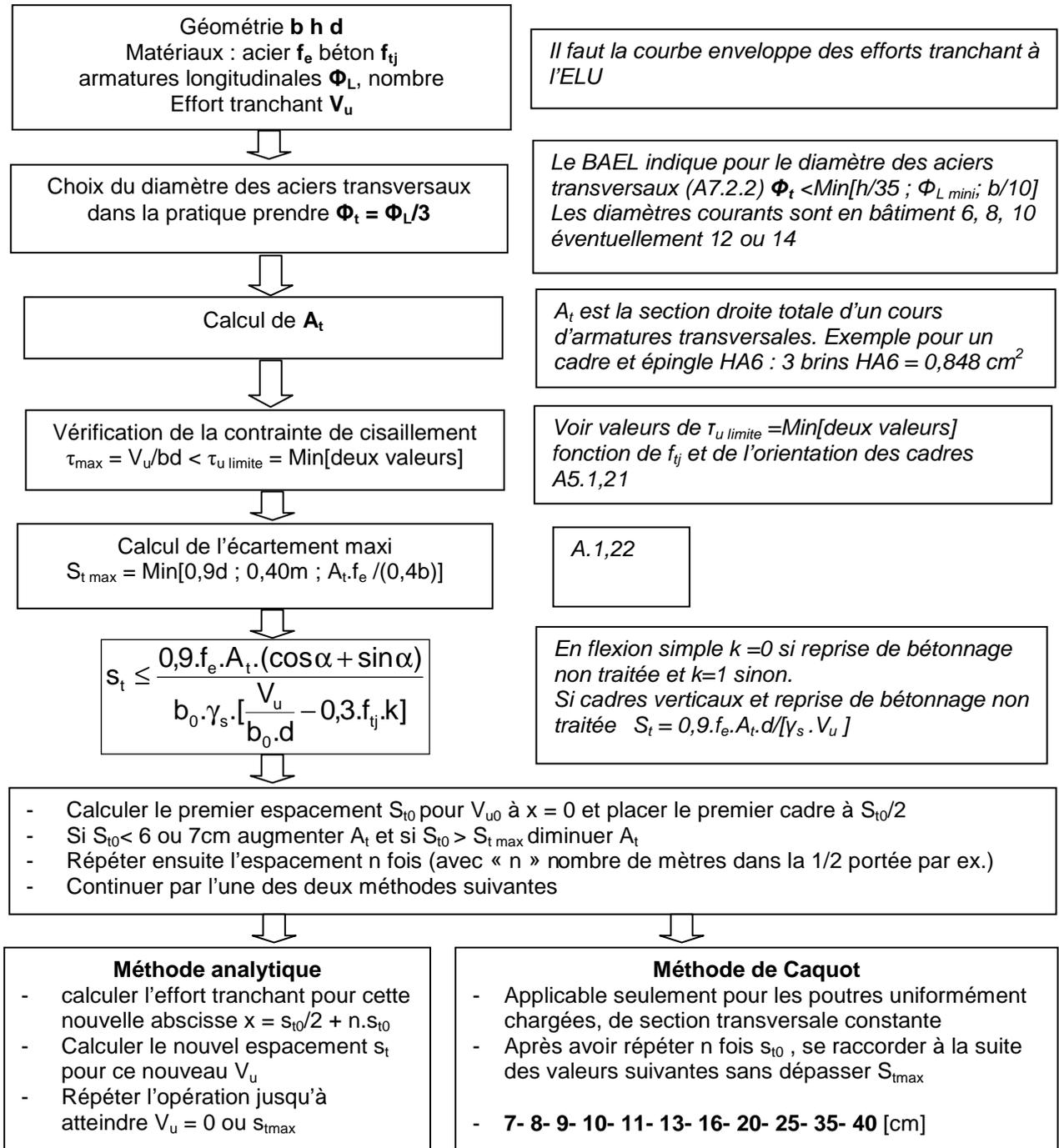
$$s_t \leq \text{Min} [0,9 \cdot d ; 40\text{cm}] \quad (\text{A 5.1,23})$$

Un pourcentage minimum est exigé pour les poutres : la section d'acier par unité de longueur A_t/s_t doit être telle que :

$$A_t/s_t \geq 0,4 \cdot b_0 / f_e \quad \text{avec } A_t \text{ en } m^2, s_t \text{ en m, } b_0 \text{ en m et } f_e \text{ en MPa}$$

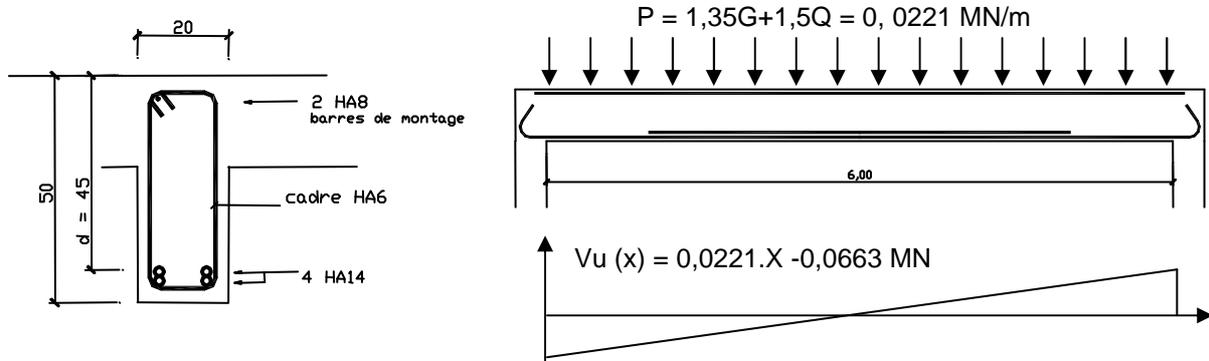
Cette condition de pourcentage minimal ne concerne pas les dalles. Voir pour cela le chapitre traitant des dalles. Il existe des dérogations aussi pour les poutres secondaires de planchers. Voir le paragraphe B.6.7,1.

5.4 Détermination pratique des armatures transversales :



5.5 Application : Suite de la poutre étudiée aux chapitres 1 et 4

Déterminer le ferrailage transversal de la poutre étudiée aux chapitres 1 et 4.



Solution.

Géométrie : $b = 0,20\text{m}$ $h = 0,50\text{m}$ $d = 0,9h = 0,45\text{m}$
 Matériaux : $f_e = 500\text{MPa}$ $f_{c28} = 25\text{MPa}$ $f_{t28} = 0,6 + 0,06 \times 25 = 2,1\text{MPa}$
 armatures longitudinales 4HA14
 Fissuration peu préjudiciable

Choix du diamètre des aciers transversaux $\Phi_t = \Phi_L/3 = 14/3$
 on choisit un cadre vertical HA6

Pour un cadre il y a 2 brins pour coudre la fissure d'effort tranchant
 $A_t = 2HA6 = 0,57\text{ cm}^2$

Vérification de la contrainte de cisaillement.
 Cadre verticaux, fissuration peu préjudiciable
 $\tau_{\max} = V_u/bd \leq \tau_{u\text{ limite}} = \text{Min}[0,2f_{c28}/\gamma_b ; 5\text{MPa}]$
 $0,663/(0,20 \times 0,45) \leq \text{Min}[0,2 \times 25/1,5 ; 5\text{MPa}]$
 $0,731\text{ MPa} \leq 3,33\text{MPa}$ OK

Calcul de l'écartement maxi $S_{t\text{ max}} = \text{Min}[0,9d ; 0,40\text{m} ; A_t \cdot f_e / (0,4b)]$
 $S_{t\text{ max}} = \text{Min}[0,9 \times 0,45 ; 0,40 ; 0,57 \cdot 10^{-4} \times 500 / (0,4 \times 0,2)] = 0,35\text{m}$

$$S_t \leq \frac{0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{b_0 \cdot \gamma_s \cdot \left[\frac{V_u}{b_0 \cdot d} - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k \right]}$$

$k = 0$ car on considère une reprise de bétonnage entre retombée de poutre et dalle. Cadre verticaux, d'où $S_t = 0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot d / [\gamma_s \cdot V_u]$
 $S_t \leq 0,9 \times 500 \times 0,57 \cdot 10^{-4} \times 0,45 / (1,15 \cdot V_u) = 0,0100/V_u$

X [m]	Vu [MN]	$S_t \leq 0,0100/V_u$	$S_{t\text{ retenu}}$ [m]	nombre
0	0,0663	0,151	0,15	
$0,15/2 + 3 \times 0,15 = 0,52$	0,0548	0,183	0,18	3
$0,52 + 3 \times 0,18 = 1,06$	0,0429	0,234	0,23	3
$1,06 + 3 \times 0,23 = 1,75$	0,0276	$0,36 > S_{t\text{ max}}$	0,35	/

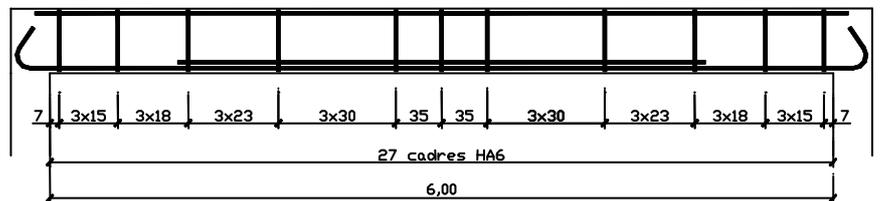
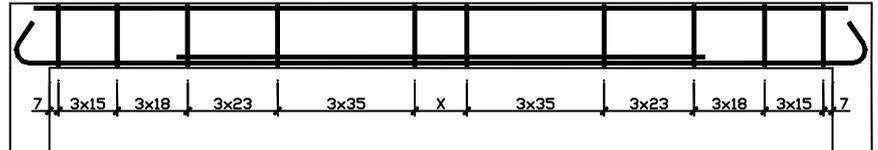
Le premier cadre est placé à $s_{10}/2$ pour couvrir la première fissure.
 Pour simplifier le calcul et la mise en œuvre, on garde 'n' fois le même espacement (en général 3 ou 4 fois).
 Mais pour la méthode de Caquot 'n' est le nombre entier de mètres dans la demi portée.

Répartition des armatures transversales :

Les calculs conduisent à la répartition théorique suivante des cours successifs d'armatures transversales.

L'intervalle "x", auquel on parvient ici, vaut 40 cm. On peut le partager en 2 x 20 cm et laisser la répartition ainsi.

Cependant, il est plus judicieux de revoir l'ensemble de la répartition et de partager l'intervalle x de chaque côté de manière à l'intégrer à la suite des espacements.



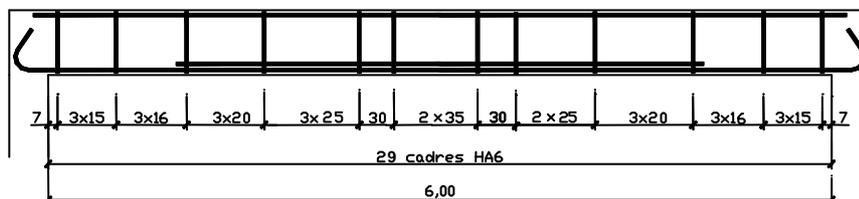
5.6 Méthode de Caquot

Reprendre l'exercice précédent, mais déterminer les espacements de cadre par la méthode de Caquot.

Solution.

Cette méthode ne permet que d'obtenir rapidement la répartition des espacements le long de la poutre après avoir calculé s_{10} . Dans notre cas la méthode de Caquot s'applique car la poutre est uniformément chargée et de section constante. On a calculé $s_{10} = 15\text{cm}$. Les autres espacements sont d'après la série de Caquot 16, 20, 25 et 35 (car $s_{\text{max}} = 35\text{cm}$). Ces espacements seront répétés n fois, avec n nombre de mètre dans la demi portée. Ici $n = 3$.

D'où le plan de ferrailage suivant. Dans la partie centrale, on ne peut mettre 'n'x 35cm, donc on répartit par exemple les cadres comme indiqué. On remarque que cette méthode simplifiée consomme dans notre cas deux cadres de plus que la méthode analytique.



5.7 Si aucune reprise de bétonnage

Reprendre l'exercice précédent, mais en considérant qu'il n'a pas de reprise de bétonnage

Solution.

Dans ce cas $k = 1$.

$$D'où s_t \leq \frac{0,9 \cdot f_e \cdot A_t \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)}{b_0 \cdot \gamma_s \cdot \left[\frac{V_u}{b_0 \cdot d} - 0,3 \cdot f_{tj} \cdot k \right]} \quad \text{soit } s_t \leq \frac{0,9 \times 500 \times 0,57 \cdot 10^{-4}}{0,20 \cdot 1,15 \cdot \left[\frac{0,0663}{0,20 \times 0,45} - 0,3 \times 2,1 \times 1 \right]} = 1,04\text{m} > 0,35\text{m}$$

L'espacement calculé est important du fait de la capacité du béton à résister à la traction. Les cadres seront donc espacés de 35cm au maximum avec des premiers cadres à $35/2 = 17\text{cm}$ du nu de l'appui. Soit le schéma de ferrailage suivant compte tenu des dimensions de la poutre.

