

Séquence 2 : Forme trigonométrique et exponentielle

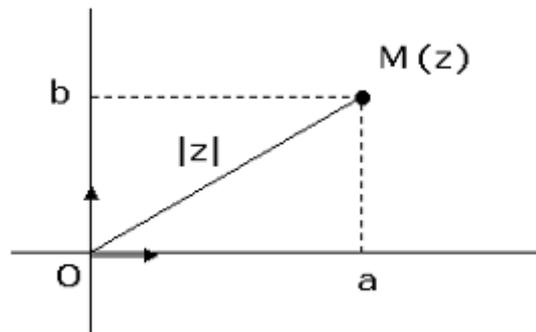
1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Module d'un nombre complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1.1.1 Définition

Le module d'un nombre complexe z , dont l'image est M , est la distance OM . On note $|z| = OM$.



Si $z = a + ib$, le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.1.2 propriétés

- Pour tout nombre complexe z et z' on a :
- $|\bar{z}| = |z| = |-z|$.
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|zz'| = |z| |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$

1.1.3 Module et distance

Si z_A et z_B sont les affixes des points A et B , on a $AB = |z_B - z_A|$.

1.2 Argument d'un nombre complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1.2.1 Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ une mesure de l'angle (\vec{u}, \widehat{OM})

1.2.2 Remarques

- Le complexe 0 a un module nul mais son argument n'est pas défini.
- $\arg z$ est défini à 2π près.
- Un nombre réel strictement positif a pour argument $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Un nombre imaginaire pur a pour argument $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

module et argument de $z = 1 - i$.

1.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.3.1 Définition

Soit z un nombre complexe non nul. z peut s'écrire sous la forme:

$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ où ρ est le module de z et θ un argument de z . Cette forme est la forme trigonométrique de z .

Il est parfois commode d'écrire aussi: $z = [\rho ; \theta]$. C'est la forme polaire

1.3.2 Relation entre forme algébrique et forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.

La forme algébrique de z est $z = a + ib$ avec $\operatorname{Re}(z) = a$ et $\operatorname{Im}(z) = b$.

$$\text{On a } \cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

La forme trigonométrique de z est $z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho = |z|$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$.

On a: $\operatorname{Re}(z) = a = \rho \cdot \cos \theta$ et $\operatorname{Im}(z) = b = \rho \cdot \sin \theta$

Exemple

Ecrire sous forme trigonométrique $z = 1 + i$.

$$\text{On a : } |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}. \text{ Soit } \theta \text{ un argument de } z. \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Une valeur de θ est $\frac{\pi}{4}$ donc $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

2.1 Définition

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Si z est un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ , la forme exponentielle de z est $z = \rho e^{i\theta}$.

Exemple

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

2.2 Formule d'Euler

Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.

Par addition et soustraction membre à membre, on a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$