Exercices sur le logarithme népérien : série n°2

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2-2x+3)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\dfrac{x-1}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2-\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [(\ln x)^2-\ln x+3]$; $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ \ln(x-1)-\ln(x-2)\ ]$; $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x+1}{\ln x-2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-1} (x+1)\ln(x+1)$; $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2}{x\ln x}$

$\lim\limits_{x\to0} x\sqrt{1+(\ln x)^2}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln x-\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{\ln(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{x+1}{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}-\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$

Exercice 2 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions f suivantes :

$f(x) = (\ln x)^2-\ln x+3$; $f(x) = \ln(x^2-2x+3)$; $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$

$f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x-1}$; $f(x)=x\ln\sqrt{x}$; $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+1}}$; $f(x) = \ln(1-\ln x)$; $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Exercice 3

La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point x_0 indiqué ?

$f(x)=x(\ln x)^2-x$, $x_0=0$; $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$, $x_0=0$; $f(x) = (x-1)\ln\dfrac{x+2}{x-1}$, $x_0=1$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue au point x_0 puis étudier la dérivabilité de f en ce point :

$f(x) = x(\ln x)^2-x$ si $x>0$ et $f(0)=0$, $x_0=0$; $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ si $x\neq0$ et $f(0)=0$, $x_0=0$

$f(x) = x-1+\dfrac{1}{\ln x}$ si $x\neq0$ et $f(0)=-1$, $x_0=0$; $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(1-x)}$ si $x\neq0$ et $f(0)=0$, $x_0=0$

Exercice 5

Déterminer un intervalle I sur lequel f est continue et déterminer une primitive de la fonction f sur I.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \qquad f(x)=\frac{1}{2-x} \qquad f(x)=\frac{1}{2x+1}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \qquad f(x)=\frac{4x-2}{2x^2-2x+1} \qquad f(x)=\frac{4x+2}{x^2+x+3}$$

$$f(x)=\tan x \qquad f(x)=\frac{1}{\tan x} \qquad f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{3x^2+3x+7}dx \qquad \int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x dx$$

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx \qquad \int_1^e \ln x dx \qquad \int_1^e x\ln x dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln(t^2)}{t}dt \qquad \int_1^3 \frac{\ln t}{(t+1)^2}dt \qquad \int_1^2 t\ln^2 t dt$$

$$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx \qquad \int_e^{e^2}\frac{1}{x(\ln x)^3}dx \qquad \int_1^3 \frac{x+1}{(x^2+x\ln x)}dx$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{x+1}$

a)Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\neq -1$, $f(x)=a+\frac{b}{x+1}$. En déduire une primitive de f.

b)A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\int_0^1 \ln(x+1)dx$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$

1 - Déterminer les réels a et b tels que : $f(x)=\frac{a}{2-x}+\frac{b}{2+x}$.

Calculer alors $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

2 - Déterminer les réels a et b tels que : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$, puis calculer : $\int_0^1 \frac{x^2+2x-1}{x-1}dx$;

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_1^e \ln x dx \qquad \int_1^e x\ln x dx \qquad \int_1^e x^2\ln x dx \qquad \int_0^1 x\ln(x+1)dx$$