Fonction logarithme

1. Généralités

La fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $I =]0;+\infty[$. Elle admet donc sur I des primitives. Il en existe une et une seule qui s'annule en x=1.

1.1 Définition

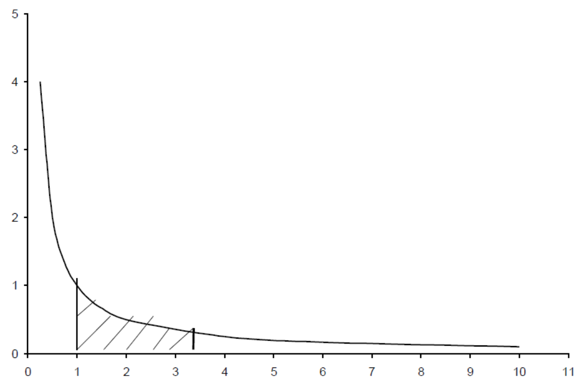
La fonction logarithme népérien, notée ln est la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1.

1.2 Propriétés

- Pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, ln x = $\int_0^x \frac{1}{t} dt$
- L'ensemble de définition de ln x est $]0;+\infty[$;
- La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- ln(1)= 0

1.3 Interprétation géométrique

Le réel ln(x) est l'aire algébrique du domaine plan situé entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et les droites d'équations x = 0 et x = 1



1.4 Propriétés algébriques

Pour tous réels a > 0 et b > 0 ; ln(a.b) = ln(a) + ln(b)

Pour tous réels a > 0 et b > 0, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ En particulier : $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

Pour tout réel a et pour tout entier n, ln a^n = n ln(a), et, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

2. Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Limites en 0 et en +∞

On peut rendre ln(x) aussi petit que l'on veut à condition de choisir x positif et suffisamment proche de 0.

On a donc $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

On peut rendre ln(x) aussi grand que l'on veut à condition de choisir x suffisamment grand.

On a donc $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

2.1.1 Théorème

On a $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

2.1.2 Le nombre e

La fonction ln est dérivable donc continue et strictement croissante sur] 0; +∞ [. De plus , $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ .ln est donc une bijection de] 0; +∞ [sur] - ∞ ; +∞ [.

Le nombre 1 est donc l'image d'un nombre réel unique positif noté e : ln e = 1.

2.1.3 Autre valeurs particulières

ln 1 = 0

ln e = 1

Pour tout entier naturel n, ln e^n = n et $\ln = \frac{1}{e}$

2.2 Tableau de variation et représentation graphique

2.2.1 Dérivée et signe

D'après la définition de la fonction ln, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour x > 0.

Donc ln'(x) > 0, ce qui implique que la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

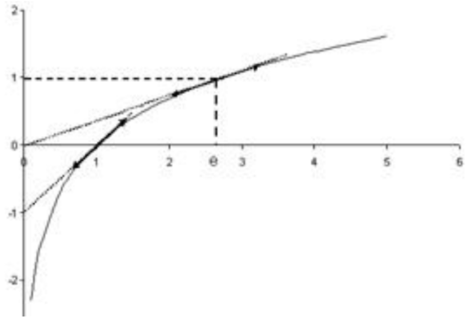
2.2.2 Tableau de variation

x	0	+∞
ln'(x)	+	
ln	-∞	+∞

2.2.3 Représentation graphique

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation y = x – 1.

La tangente au point d'abscisse e a pour équation $y = \frac{1}{e}x$



3. Résolution d'équations et d'inéquations

La fonction ln est dérivable donc continue et strictement croissante sur] 0; +∞ [. De plus , $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ .ln est donc une bijection de] 0; +∞ [sur] - ∞ ; +∞ [. On en déduit

3.1 Théorème

Pour tous réels a > 0 et b > 0 :

- a = b si et seulement si ln(a) = ln(b) ;
- a > b si et seulement si ln(a)> ln(b) ;
- a > 1 si et seulement si ln(a) > 0 ;
- 0 < a < 1 si et seulement si ln(a) < 0.
- ln(x) = m si et seulement si x = e^m.

4. Dérivée et primitive de ln(u(x))

4.1 Dérivée

Rappelons que la dérivée d'une fonction composée (f o u)(x) = f[u(x)] est (f[u(x)])' = f'(u).u'(x).

En l'appliquant à la fonction ln [u(x)], nous avons :

$$(\ln[u(x)])' = (\ln u)' \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ainsi, l'étude du signe de la dérivée (ln[u(x)])' revient à l'étude du signe de u'(x).

4.2 Résolution de l'équation ln(u(x)) = m

4.2.1 Méthode

On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation.

ln(u(x)) = m si et seulement si u(x) = e^m.

La ou les racines cherchées sont celles qui appartiennent à l'ensemble de définition.

4.2.2 Exemple

Résoudre dans IR l'équation ln(2x + 3) = 1.

l'équation a un sens si 2x + 3 > 0

ln(2x + 1) = 1 <=> 2x + = e , on a alors x = $\frac{e-3}{2}$

4.3 Résolution d'inéquation

4.3.1 Méthode

Dans le cas de la résolution d'une inéquation, on suit les mêmes étapes que précédemment.

4.3.2 Exemple

Résoudre dans IR l'inéquation ln(x - 1) > 2.

Ensemble de définition : $D=\{x;\ x\in\mathbb{R}\ /\ x-1>0\}$ c'est-à-dire $D=]1;+\infty[$.

Comme la fonction ln est croissante, ln (x - 1) > 2 si et seulement si (x - 1) > e² c'est-à-dire x > e² – 1.

L'ensemble des solutions est $S=]e^2-1;+\infty[$.

5. Primitive

Par lecture inverse du tableau de la dérivée, on a :

Fonction f(x)	Primitives F(x)
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)+k$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+k$