Primitives et intégrales

1. Primitives

1.1 Notion de primitive

1.1.1 Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Une fonction f est une primitive de sur I lorsque f est la dérivée de F sur I.

1.1.2 Exemple

f(x) = 2x +1 est continue sur IR.

Soit f(x) = x² +x -1. On a F'(x) = 2x + 1.

Comme F'(x) = f(x), f est une primitive de f sur IR.

1.1.3 Théorème

Nous admettrons le théorème suivant :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

1.2 Ensemble des primitives d'une fonction

1.2.1 Théorème

Si F est une primitive de f sur un intervalle I,alors toute primitive de f sur I est de la forme F + k où k est une fonction constante sur I.

En effet :

si F est une primitive de f sur I,G(x) = F(x) + k l'est aussi car G'(x) = F'(x) +0 = f(x).

Donc G est une primitive de f sur I.

Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, on a (F-G)'(x) = F'(x) – G'(x) = f(x) – f(x)= 0.

Donc F- G K où K est une fonction constante sur I c'est-à-dire pour tout x de I, G(x) = F(x) + k ;

Remarque

l'hypothèse I est intervalle est fondamentale. En effet, Soient F(x) = $\frac{1}{x}$ et $G(x) = \begin{matrix} \frac{1}{x} + 1 \, si \, x > 0 \\ \frac{1}{x} - 1 \, si \, x < 0 \end{matrix}$

Sur chacun des intervalles] - ∞ ; 0[et]0 ; +∞ [F et G ont même d »rivée mais il n'existe pas de constante k telle que pour tout x de IR*, G(x) = F(x).

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, x_0 un réel de I et y_0 un réel.

Il existe une et une seule primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

En effet : si G est une primitive de f sur I,la fonction définie par $F(x) = G(x) + y_0 – G(x_0)$ convient car

$F'(x) = G'(x)$ et $F(x_0) = y_0$.

Il est facile de vérifier l’unicité de F.

Exemple

1.3 Recherche de primitives

1.3.1 Primitive des fonctions usuelles

La lecture inverse du tableau donnant les fonctions dérivées des fonctions usuelles permet de dresser un premier tableau de primitives usuelles.

1.3.2 Opérations sur les primitives

a) Propriétés

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors:

- F + G est une primitive de f + g sur I
- $\forall k \in$ IR , kF est une primitive de k f sur I

b) Tableau des primitives usuelles

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions. u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction f	Primitive F sur I	I
f (x) = 0	F(x) = k	IR
f (x) = a	F (x) = ax + k	IR
f (x) = ax + b	F (x) = $\frac{1}{2}$ ax² + bx + k	IR
f (x) = x^n , n entier différent de –1	F(x) = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ +k	IR
f (x) = $\frac{1}{x^2}$	F(x) = $-\frac{1}{x}$ + k	]-∞ ; 0[ou] 0 ; +∞ [
f(x) = $\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	]-∞ ; 0[ou] 0 ; +∞ [

Exemple

f(x) = 6x² -3 ; F(x) = $2x^3$ -3x + k

c) Opérations sur les primitives

f(x) = $u' u^n$ (n ≠ –1) , F(x) = u^n + k

f(x) = $\frac{u'}{u^2}$, F(x) = $-\frac{1}{u}$ + k

1.3.3 Primitivation par partie

Cette formule découle de la formule de la dérivée d’un produit.

Comme (u v)’ = u’ v + v’ u , on en tire u’ v = u v – v’ u. Donc,

primitive (u’ v) = u v – primitive (v’ u)

2. Intégrales

2.1 Définition

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une de ces primitives, soient a et b deux points de I. La quantité F(b) − F(a) (encore notée $[F(x)]_a^b$) est appelée intégrale de f entre a et b et est notée $\int_a^b f(x)dx$.

On lit « somme de a à b de f(x) dx ».

a et b sont les bornes de l'intégration

la variable x est appelée variable de l'intégration. On peut la remplacer par n'importe quelle lettre car elle n'intervient pas dans le résultat.

2.2 Expression d'une primitive au moyen d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I.

L'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en a est la fonction f définie par :

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Dès qu'une fonction est continue sur un intervalle, elle y admet une primitive. Mais cette primitive peut ne pas s'exprimer par une formule simple rencontrée dans les formulaires.

Par exemple, la fonction définie par f(x) = $\frac{1}{x}$ est continue sur] 0 ; + ∞ [. Elle admet alors une primitive qui s'annule en x = 1 sur cet intervalle, et on a $F(x)=\int_a^x \frac{1}{t}dt$. On va étudier ultérieurement cette fonction .

2.3 Propriétés de l'intégrale

f est une fonction admettant comme primitive F.

- On a $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a)$, donc $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$ alors $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Relation de Chasles

Si a, b et c sont des éléments de l'intervalle I sur lequel f est continue, alors

$$F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

- $\int_a^b (k.f)(x)dx = (k.F)(b) - (k.F)(a) = k[F(b) - F(a)]$

• Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a;b]. Elle admet donc une primitive F sur cet intervalle.
On a alors F '(x) = f(x) pour tout x de [a;b]. Donc F est croissante sur cet intervalle.

Comme $a \le b$, $F(a) \le F(b)$, et $F(b) - F(a) \ge 0$

- Si $f(x) \ge 0$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
- par conséquent

Si $f(x) \ge g(x)$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

Théorème

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

$\int_a^b (f+g)(x)dx = (F+G)(b) - (F+G)(a)$

$\int_a^b (k.f)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Si $f(x) \ge 0$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

Si $f(x) \ge g(x)$ pour tout x de [a;b], alors $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

2.4 Valeur moyenne d'une fonction- inégalité de la moyenne

2.4.1 Valeur moyenne

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b].

La valeur moyenne de f sur [a ; b]. est le nombre μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2.4.2 Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de I, $m \le f(x) \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

S'il existe un réel M tels que pour tout x de I, $|f(x)| \le M$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$

En effet,

- Supposons $m \le f(x) \le M$ pour tout x de I.

En intégrant entre a et b chaque membre, on a $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

- Supposons $|f(x)| \le M$ pour tout x de I, ce qui équivaut à $-M \le f(x) \le M$.

En appliquant le résultat précédent, on a $-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, qui équivaut à

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$

2.5 Interprétation géométrique d’une intégrale

2.5.1 Unité d’aire

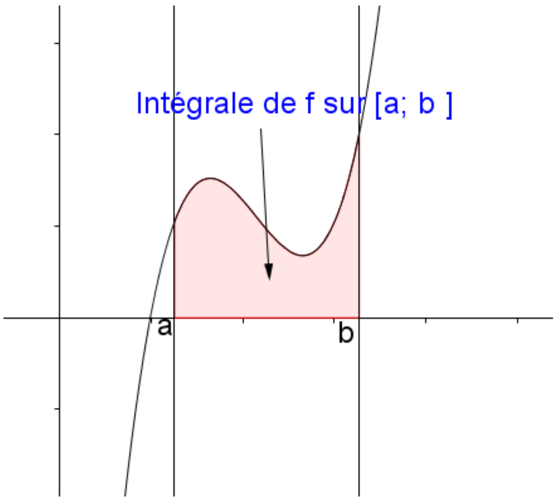
Le plan est muni d’un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ l’unité d’aire est l’aire du rectangle de dimension $\|\vec{i}\|$ *et* $\|\vec{j}\|$.

Si le repère est orthonormé est l’unité est le centimètre , alors 1 u a = 1 cm²

2.5.2 Calcul d’aire

Fonction positive

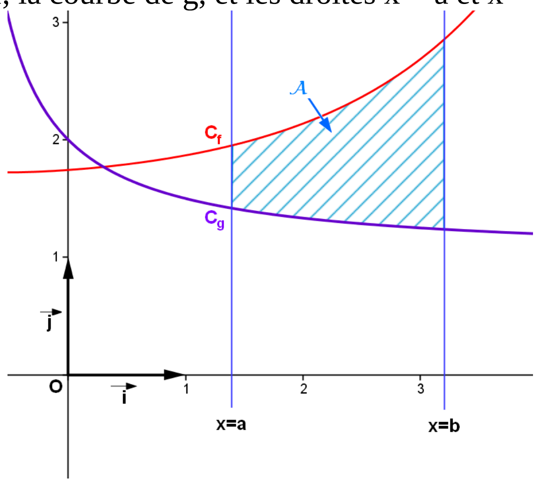
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. L’ intégrale de f sur [a ; b] est l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.



Aire entre deux courbes

si f et g sont deux fonction continues sur [a ; b], telles que $g(x) \leq f(x)$ pour tout x de [a ; b], alors l’aire du domaine délimité par la courbe de f, la courbe de g, et les droites x = a et x = b, est donnée par

$A = \int_a^b [f(t)-g(t)]dt$ u.a



2.6 Extension

Soit f une fonction continue sur I et u une fonction dérivable telle que u(x) appartient à I, et soit F la fonction définie par $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$

On a F(x) = G(u(x))-G(a) où G est une primitive de f sur I
F(x) = G o u (x)-G(a).
G et u sont dérivables, donc G o u est aussi dérivable.
F'(x) = u'(x). G'(u(x))-0
Comme G'(x)= f(x), F'(x) = u'(x).f [u(x)]

Ainsi, si $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$, alors F'(x) = u'(x).f [u(x)].

2.6.1 Théorème

Soit f une fonction continue sur I et u une fonction dérivable telle que u(x) appartient à I, et soit F la fonction définie par $F(x)=\int_a^{u(x)} f(t)dt$, on a F'(x) = u'(x).f [u(x)].

2.6.2 Exemple

Soit f(x) = $\frac{x+1}{x+2}$ et F(x) = $\int_0^{2x} f(t)\,dt$. Calculer F'(x).

On a F'(x) = (2x)'f(2x) = 2 $\frac{2x+1}{2x+2}$ = $\frac{2x+1}{x+1}$