Inégalités des accroissements finis

1. Théorème des inégalités des accroissements finis sans valeur absolue

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x appartenant à I, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors quels que soient a et b de I, tels que $a \leqslant b$, on a $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$

Démonstration

Soit f une fonction dérivable telle que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout x appartenant à I.

Posons g(x)= M.x -f(x) Alors g est dérivable et g'(x)= M- f '(x)

Par hypothèse, $f'(x) \leqslant M$ pour tout x de I, donc $g'(x) \geq 0$, et g est croissante sur I

Alors si $a \leqslant b$, on a $g(a) \leqslant g(b)$, ou $M.a-f'(a) \leqslant M.b-f(b)$

Ce qui donne $f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$

De la même façon, en posant h(x) = m.x – f(x), on montre l'autre inégalité.

2. Théorème des inégalités des accroissements finis avec valeurs absolues

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

S'il existe un réel positif M tel que pour tout x appartenant à I tels que $|f'(x)| \leqslant M$, alors quels que soient a et b de I, on a $|f(b)-f(a)| \leqslant M|(b-a)|$

Démonstration

On rappelle que $|f'(x)| \leqslant M$ équivaut à $-M \leqslant f'(x) \leqslant M$

Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent avec m = -M

Exemple

Soit f la fonction définie par f(x)= sin x

f est dérivable et f '(x) = cos x.

Comme pour tout réel x, on a $|\sin b-\sin a| \leqslant |b-a|$ quels que soient les réels a et b

Interprétation graphique

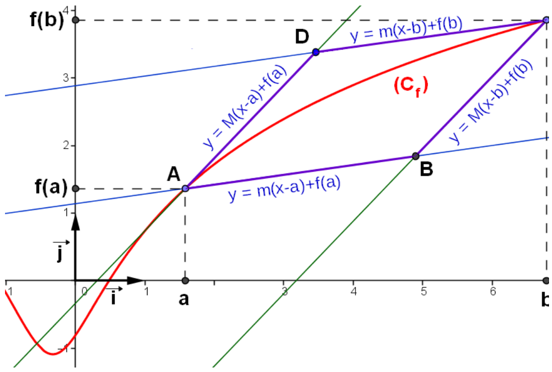
Soit f une fonction dérivable vérifiant $m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Le théorème 1 permet d'écrire

$m(x-a) \leqslant f(x)-f(a) \leqslant M(x-a)$ pour tous x et a de l'intervalle I tels que a < x, et $m(b-x) \leqslant f(b)-f(x) \leqslant M(b-x)$ pour tous x et b de l'intervalle I tels que x < b.

Ce qui donne $m(x-a)+f(a) \leqslant f(x) \leqslant M(x-a)+f(a)$ et $M(b-x)+f(b) \leqslant f(x) \leqslant m(b-x)$ pour tout x de l'intervalle [a ; b]

Ainsi la courbe de f se trouve dans le parallélogramme ABCD lorsque $a \leqslant x \leqslant b$



Applications

Donner un encadrement de $\sqrt{10001}$ en utilisant les inégalités des accroissements finis.

Posons $f(x)=\sqrt{x}$, a = 10 000 et b = 10 001.

f est dérivable sur [a ; b] et . $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme f ’(x) > 0 sur [a ; b], f est strictement croissante et positive sur [a ; b].

Alors, pour tout x de [a ; b], $\sqrt{10\,000}\leqslant\sqrt{x}\leqslant\sqrt{10\,001}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{10\,001}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

D’où $\dfrac{1}{2\sqrt{10\,001}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{10\,000}}$ ou $\dfrac{1}{2\sqrt{10\,001}}\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{10\,000}}$.

En appliquant le théorème des inégalités des accroissements sans valeurs absolues, on a :

$$\frac{b-a}{2\sqrt{10\,001}}\leqslant f(b)-f(a)\leqslant\frac{b-a}{2\sqrt{10\,000}} ,$$

ou

$$\frac{1}{2\sqrt{10\,001}}\leqslant\sqrt{10001}-\sqrt{10000}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{10\,000}}$$

Puisque $\sqrt{10\,001}\leqslant 101$ et $\sqrt{10\,000}=100$, on a $\dfrac{1}{2.\,101}\leqslant\sqrt{10001}-100\leqslant\dfrac{1}{2.\,100}$

Ce qui donne finalement $100{,}00495\leqslant\sqrt{10001}\leqslant 100{,}005$