Dérivation d'une fonction

1. Dérivabilité en un point – Nombre dérivé

1.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; on la note f '(x_0)

On a donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou, en posant x=x_0+h, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Exemple : $f(x) = x^2 + x - 1$

f est-elle dérivable en x_0=1 ?

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-1)-(1+1-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 3$$

On a une limite finie, donc f est dérivable en 1 et ..**f '(1)= 3**

1.2 Définition équivalente

f est dérivable en x_0 si pour tout h tel que h appartient à I, on peut écrire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0.$$

Avec cette formulation de la définition, le réel a est le nombre dérivé de f en x_0

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction φ définie par $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a \text{ si } x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

On a alors pour tout h tel que x_0 +h appartient à I, $\mathbf{f(x_0+h) = f(x_0) + a.h + h\varphi(h)}$

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0 \text{ équivaut à } \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

Ce qui établit l'équivalence.

L'écriture $f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+h\varphi(h)$ est appelée développement limité d'ordre 1 de f au point x_0.

Remarque

Dès que l'on rencontre une écriture $\mathbf{f(x_0+h)=\alpha+\beta.h+h\varphi(h)}$ avec $\mathbf{\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0}$ *on peut conclure que :*

$\alpha=\mathbf{f(x_0)}$, *que f est dérivable en* x_0 et $\beta=\mathbf{f'(x_0)}$

$\mathbf{f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0).h+h\varphi(h)}$ donc $f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h=h\varphi(h)$

Et lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend aussi vers 0 ; ce qui fait que lorsque h est très proche de 0, alors $\mathbf{f(x_0+h)}$ est aussi très proche de $\mathbf{f(x_0)+f'(x_0).h}$

L'erreur commise en prenant $\mathbf{f(x_0)+f'(x_0).h}$ comme valeur approchée de $f(x_0+h)$ est $\mathbf{h\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0).h}$

En utilisant la variable x, le développement limité de f en a s'écrit :

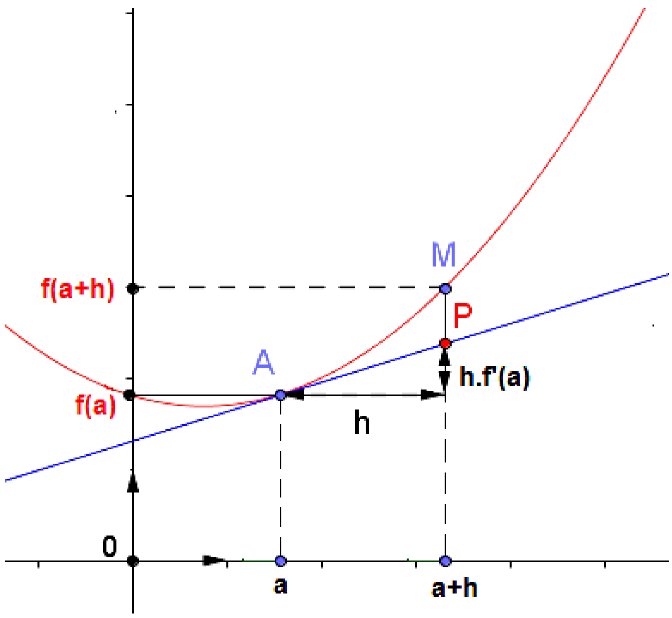
$$\mathbf{f(x)=f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)+(x-x_0)\varphi(x)}$$

La fonction $\mathbf{x\mapsto f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)}$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0

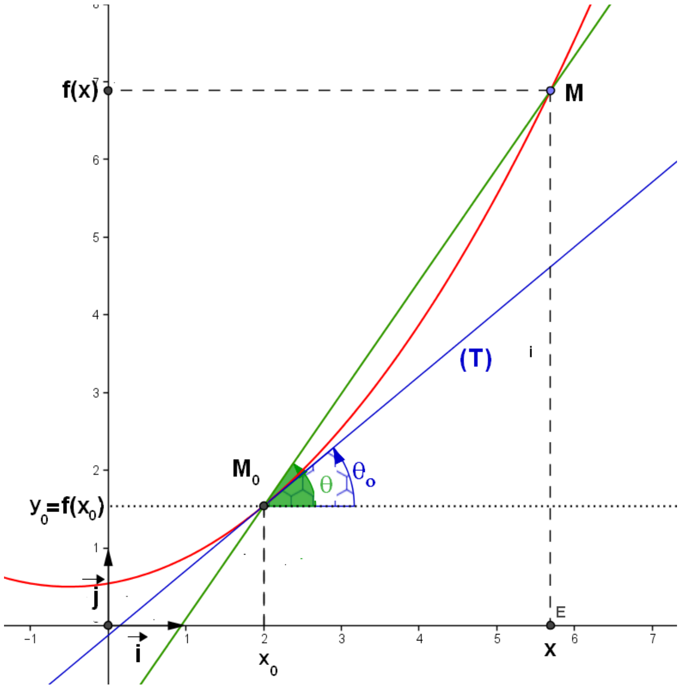
Interprétation graphique :

$|h.\varphi(h)|$ *représente la distance PM.*

Plus M se rapproche de A, plus la distance devient très petite



1.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé



Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f

et $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ deux points de (C_f) .

Considérons la droite (AM) ; elle a pour pente (ou

coefficient directeur) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Si on fait tendre M vers M_0 , x va tendre vers x_0 et la droite (M_0M) va tendre vers une position limite (T) appelée droite tangente à la courbe au point A, et

sa pente tend vers $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ qui

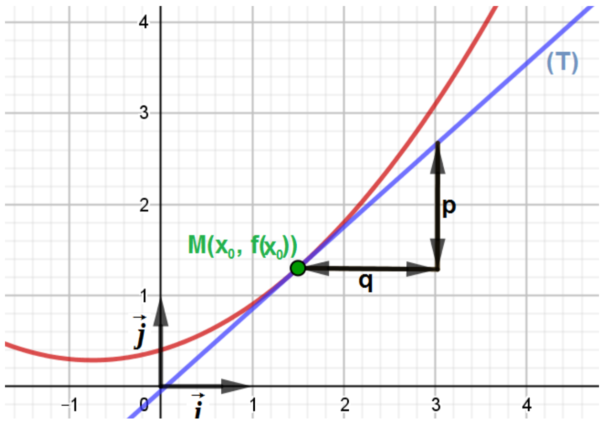
est la pente de (T) : c'est la tangente de l'angle θ_0 que fait la droite (T) avec l'axe des abscisses.

Considérons un point M(x,y) de (T), on doit avoir : $\tan\theta_0 = f'(x_0) = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0}$

ou $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: c'est l'équation de la tangente (T) à la courbe (ζ_f) au point M_0 (x_0 ;f(x_0))

Remarques

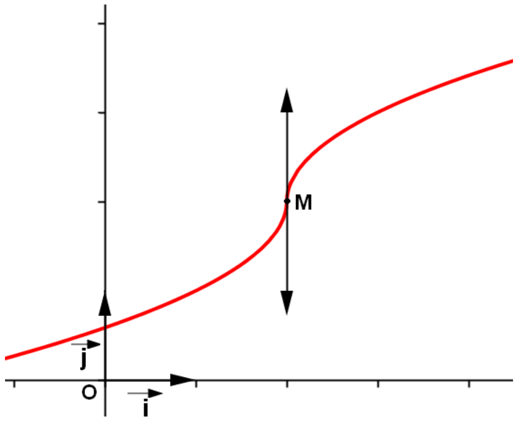
- Si $f'(x_0) = \dfrac{p}{q}$, alors nous avons la construction suivante



- Si f'(x_0) = 0, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale).

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, f n'est pas dérivable en x_0,

on a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.



1.4 Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche) si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ (respectivement vers x_0^-).

Les limites lorsqu'elles existent, sont appelées respectivement nombre dérivé à gauche et nombre dérivé à droite de f en x_0, et notés $\mathbf{f'_g(x_0)}$ et $\mathbf{f'_d(x_0)}$.

$$f_d'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ et } f_g'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, lorsqu'elles sont finies.

Théorème

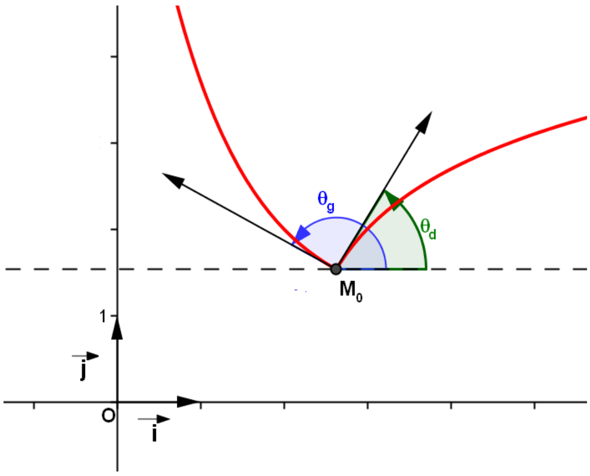
Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 ; il faut et il suffit que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux, c'est-à-dire si :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ (finie)}$$

Remarque

Si $\mathbf{f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)}$, (f n'est pas dérivable en x_0) on a deux demi tangentes à gauche et à droite de M_0, de pentes respectives. $\mathbf{f'_g(x_0)}$ et $\mathbf{f'_d(x_0)}$.

On dit que M_0 est un point anguleux.



On a $\mathbf{f'_d(x_0) = \tan\theta_d}$ et $\mathbf{f'_g(x_0) = \tan\theta_g}$

2. Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définitions

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a.

Théorème

Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

<u>*Démonstration*</u> *:* f est dérivable en x_0 donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est un réel *l*.

Posons $\begin{cases} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$

On a $f(x) = [\varphi(x)+l](x-x_0)+f(x_0)$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0) + l(x-x_0)]$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x)(x-x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x-x_0)$$

Or $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)(x-x_0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} l(x-x_0) = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. D'où la continuité de f en 0.

Remarque :

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie : il suffit de considérer les fonctions dont la courbe possède un point anguleux.

2.2 Fonctions de référence

- Les fonctions constantes sont dérivables sur IR.
- La fonction identité $x \mapsto x$ est dérivable sur IR.
- La fonction racine carré $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur]0 ; +∞ [.
- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur IR.

Démonstrations

- Soit f la fonction définie pour tout x de IR par f(x)= k, où k est une constante réelle.

Puisque f(x)= f(x_0) = k, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ donc $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, qui est un nombre fini. Donc f est dérivable en tout point x_0 de IR et f '(x_0) = 0 pour tout x_0 de IR.

- Soit f la fonction définie par f(x)=x pour tout x de IR,

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Donc f est dérivable en tout point x_0 de IR et f '(x_0) = 1 pour tout x_0 de IR.

- Soit f la fonction définie par f(x) = $\sqrt{x}$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$$

- En multipliant et en divisant par l'expression conjuguée du numérateur, on a

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ qui est un nombre fini si $x_0>0$.

Donc f est dérivable en tout point x_0 de]0 ; +∞ [et $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ pour tout x_0 de]0 ; +∞ [.

- Soit f la fonction définie par f(x) = sin x

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}$$

La formule de transformation d'une somme en produit donne $\sin x-\sin x_0=2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})$.

Donc $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2}$

On rappelle que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, donc en posant $X=\frac{x-x_0}{2}$, on a $\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

$$\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos\frac{2x_0}{2}=\cos x_0$$

D'où $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\cos x_0$ qui est un nombre fini.

Ainsi f est dérivable en tout point x_0 de IR et f '(x_0) = cos x_0 pour tout x_0 de IR.

- On procède de la même façon pour la fonction cosinus, et on trouve f '(x_0) = -sin x_0.