

Fonctions continues

1. Continuité en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et $x_0 \in I$, distinct des extrémités de I . Si f est définie en x_0 et si elle admet une limite en x_0 , cette limite est $f(x_0)$.

Exemple

soit $f(x) = x^2 + x + 1$. En appliquant les théorèmes sur les limites, nous avons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ et $f(1) = 3$

1.1 Définition :

On dit que la fonction f est continue en x_0 si elle admet une limite finie en ce point et cette limite est $f(x_0)$. Autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Une fonction qui n'est pas continue en x_0 est dite discontinue en x_0 .

Exemple : Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = -3 \end{cases}$$

f est elle continue en $x_0 = -1$?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 2 = -3 = f(-1)$$

Donc f est continue en $x_0 = -1$

1.2 Continuité à gauche – Continuité à droite :

- Si f est définie sur $[x_0; x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$, f est continue à droite en x_0 si la $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Si f est définie sur $]x_0 - \alpha; x_0]$, f est continue à gauche en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On rappelle que f admet une limite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Donc f est continue en x_0 si et seulement f est continue à gauche en x_0 et continue à droite en x_0 , c'est-à-

dire si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

(on utilise cette définition dans le cas où les expressions de $f(x)$ sont différentes à gauche et à droite de a)

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{si } x > 0 \\ f(x) = 2x - 1 \quad \text{si } x \leq 0 \\ f(0) = -1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1 \\ f(0) = -1 \end{array}$$

Donc f est continue en $x_0 = 0$

1.3 Prolongement par continuité.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , x_0 un élément de I , et f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$.

Si f admet une limite finie en x_0 , c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ est finie, alors f est prolongeable par continuité en x_0

On obtient une fonction continue g en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) = f(x) \quad \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{array} \right.$$

Cette fonction g , continue en x_0 , est appelée prolongement de f par continuité en x_0

Exemple

soit f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Pour tout $x \neq 1$, on a $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Le prolongement par continuité de f est la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 1$ et $g(1) = 2$.

2. Continuité sur un intervalle

2.1 Définition

On dit que f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

f est continue sur $[a, b]$, si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Graphiquement, une fonction est continue si la courbe représentative de cette fonction est continue.

2.2 Continuité des fonctions usuelles

- Toute fonction constante est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction identité $x \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur \mathbb{R} .

2.3 Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues sur un intervalle I , alors $f + g$, $\lambda \cdot f$ (ou $\lambda \in \mathbb{R}$) et $f \cdot g$ sont continues sur I .

Si de plus g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Si f est continue sur I et g continue sur $J = f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .

Conséquences

- Toute fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- Si f est continue et positive sur I , alors \sqrt{f} est continue sur I .
- La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

Ces résultats découlent des propriétés des limites

2.4 Propriétés des fonctions continues sur une intervalle

Théorème

Si f est continue sur $[a, b]$ alors l'image de $[a, b]$ par f est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux éléments de l'ensemble de définition de f tels que $a < b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors quel que soit y_0 appartenant à $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$, il existe au moins $c \in [a, b]$ vérifiant $f(c) = y_0$; en d'autres termes, quel que soit $y \in [f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$, l'équation $y_0 = f(x)$ admet au moins une solution $c \in [a, b]$.

Si, de plus, f est strictement monotone, cette solution est unique.

Cas particuliers :

- Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$
- Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]a, b[$, i.e, il existe au moins un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

- Exemple

Montrer que l'équation $x^3 - 2x - 1 - \sin(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; \pi]$.

On n'a pas de méthode qui permet de résoudre algébriquement cette équation.

$f(x) = x^3 - 2x - 1 - \sin(x)$. f est la somme de deux fonctions continues $x \mapsto x^3 - 2x - 1$ et \sin , donc f est continue (sur \mathbb{R}). $f(0) = -1 < 0$ et $f(\pi) = \pi^3 - 2\pi - 1 > 0$. Donc l'équation admet au moins une solution dans cette intervalle.

Théorème

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Donc si b est un élément de J , alors il existe un élément a unique de I , tel que $f(a) = b$.