Limite en T OSE

1. Rappels

1.1 Les formes indéterminées

Les formes indéterminées sont : + ∞ - ∞, 0.∞ , $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

1.2 Calcul pratique

1.2.1 Méthode

Pour calculer la limite de f(x) quand x tend vers a (a fini ou infini) :

- on remplace tous les x par a,

- on effectue l'opération en respectant les formes indéterminées et en suivant les règles des opération sur les signes.

1.2.2 Opération sur les limites

a) Limite d'une somme

Le tableau ci-dessous résume le calcul de la limite de f(x) + g(x). a peut designer un nombre fini ou infini.

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ = et	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$ = alors	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} f(x)+g(x)$ =	l+l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

b) Limite d'un produit

Le tableau ci-dessous résume le calcul de la limite de f(x) x g(x). a peut designer un nombre fini ou infini.

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ = et	l	l ≠ 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim_{x \to a} g(x)$ = alors	l'	∞	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \to a} f(x) \times g(x)$ = avec règle de signe	l.l'	∞ avec règle de signe	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

c) Limite d'un quotient

Le tableau ci-dessous résume le calcul de la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$. a peut designer un nombre fini ou infini.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ = et	l	l ≠ 0	0	l ≠ 0	∞	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$ = alors	l'	0	0	∞	l	∞
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ =	$\frac{l}{l'}$	∞ avec étude de signe	?	0	∞ avec règle de signe	?

d) Unicité de la limite

Si une fonction f admet une limite en un point x_0, ou à l'infini, alors cette limite est unique .

1.3 Limite à gauche et limite à droite :

Soit une fonction définie sur $]x_0 ; x_0 + \alpha [$,on dit que l est la limite de f à droite en x_0 si l est la limite de f (x) quand x tend vers x_0 par valeurs supérieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x > x_0$. On écrit :

$$l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Si f est définie sur $]x_0 – \alpha ; x_0[$, , on dit que la limite de f à gauche de x_0 est l, si l est la limite de f (x) quand x tend vers x_0 par valeurs inférieurs, c'est-à-dire quand x tend vers x_0 et $x < x_0$. On écrit :

$$l = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Exemple

: $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

2. Théorèmes généraux sur les limites

2.1 Théorème de comparaison

Soient deux fonctions f et g admettant une limite quand x tend vers α, et tel que f(x) ≤ g(x) , pour tout x.

- si lim f (x)= l et lim g(x)= l ' alors l ≤ l '
- si lim f (x) = +∞ alors lim g(x) = +∞
- si lim g(x) = −∞ alors lim f (x) = −∞

Exemple

Soient f et g deux fonctions définies sur }0 ; +∞ [par : f(x) = 1 - $\frac{1}{x^2}$ et g(x) = 2 + $\frac{1}{x}$. Pour tout x positif, g(x) – f(x) = 1 + $\frac{1}{x}$ + $\frac{1}{x^2}$ est positif donc f(x) ≤ g(x).

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=2$. On constate que $\lim_{x\to+\infty} f(x)\leq \lim_{x\to+\infty} g(x)$

2.2 Théorème des gendarmes

Soient f, g, h trois fonctions vérifiant f (x) ≤ g(x) ≤ h(x) quel que soit x.

Si lim f (x) = lim h(x) = l alors lim g(x) = l .

Exemple

nous savons que -1 ≤ sin x ≤ 1, alors $\frac{-1}{x}$ ≤ $\frac{\sin x}{x}$ ≤ $\frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x}=0$

2.3 Limite par encadrement

Si |f(x)−l|≤g(x) quel que soit x et si lim g(x)=0 alors lim f (x)=l

2.4 Limite d'une fonction composée

Soit la fonction composée v o u définie sur un intervalle I contenant α ou dont α est une borne.

Si $\lim_{x\to\alpha} u(x)=a$ et $\lim_{x\to a} v(x)=b$,alors $\lim_{x\to\alpha} v\, o\, u(x)=b$.

Exemple

Soit f(x) = $\sqrt{(x^2+1)}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} x^2+1=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$,on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$