Applications particulières

1. Applications particulières

1.1 Applications injectives (ou injections).

Une application $f : E \to F$ est dite injective si deux éléments distincts de E ont deux images distinctes, c'est-à-dire si quels que soient x_1 et x_2 de E tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq f(x_2)$ (donc si $f(x_1)=f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$)

En d'autres termes,

$f : E \to F$ est injective si chaque élément de F possède au plus un antécédent dans E

1.2 Applications surjectives (ou surjections)

$f : E \to F$ est surjective si tout élément y de F est l'image d'au moins un élément de E (c'est-à-dire si quel que soit $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ $(donc\, f(E) = F)$

En d'autres termes,

$f : E \to F$ est surjective si chaque élément de F possède au moins un antécédent dans E,

ou encore,

$f : E \to F$ est surjective si quel que soit y de F, l'équation y= f(x) possède au moins une solution x dans E

1.3 Applications bijectives (bijections)

1.3.1 Définition

$f : E \to F$ est bijective su tout élément y de F est l'image d'un et d'un seul élément x de E.

f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

$f : E \to F$ est bijective si et seulement si quel que soit l'élément y de F, l'équation y = f(x) possède une solution et une seule dans E

Lorsque $f : E \to F$ est bijective, $CardE = CardF$

1.3.2 Réciproque d'une bijection

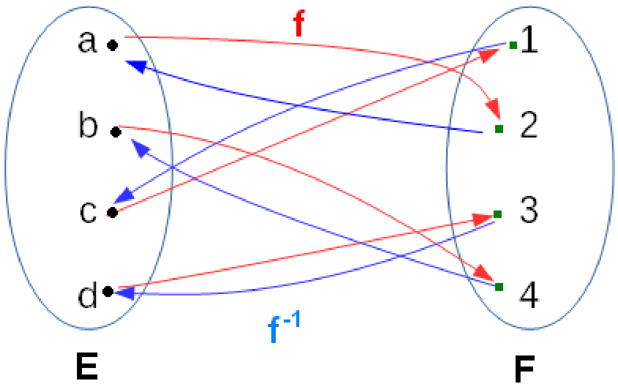
Si $f : E \to F$ est bijective, il existe une application de F vers E, notée f^{-1}, appelée réciproque de f, définie pour tout y de F par : si $y = f(x)$ alors $x = f^{-1}(y)$.

$$\begin{array}{lll} f^{-1} : F \to E & \quad \text{si et seulement si} \quad & f : E \to F \\ y \mapsto x = f^{-1}(y) & & x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

f est représentée par les flèches rouges, et donc f^{-1} par les flèches bleues.

L'ensemble de départ de f est E,, son ensemble d'arrivée est F,

L'ensemble de départ de f^{-1} est F, son ensemble d'arrivée est E.



f(a) =2 donc $f^{-1}(2)$= a

f(b)= 4 donc $f^{-1}(4)$= b

f(c) = 1 donc $f^{-1}(1)$= c

f(d) = 3 donc $f^{-1}(3)$= d

Propriétés

- $fof^{-1}= id_F$ et $f^{-1} o f = id_E$

id_E = identité de E = application identique

$id_E : E \to E$

$x \mapsto id_E(x) = x$

- $(fog)^{-1}=g^{-1}o f^{-1}$

- Si $fof = id_E$, c'est-à-dire $f^{-1}=f$, on dit que f est involutive ou que f est une involution

Remarques :

$f : E \to F$

- Si f est une application, alors $f(E) \subset F$
- f est injective si et seulement si $Card\,f(E) = Card E$
- f est surjective si et seulement si $f(E) = F$ (car tout élément de F est l'image d'un élément au moins de E)

- Dans le cas où $Card E = Card F$,

✗ Si f est injective, $Card\,f(E) = Card E = Card F$

Card f(E)= card F et $f(E) \subset F$, donc f(E) = F, ainsi f est surjective. Par conséquent, f est bijective

✗ Si f est surjective, $f(E) = F$, $Card\,f(E) = Card F = Card E$, donc f est injective

Ainsi, f est bijective

Théorème

Soient E et F deux ensembles tels que $CardE = CardF$, et f une application de E vers F

Si f est surjective alors f est bijective

Si f est injective alors f est bijective

2. Dénombrement d'application

Soit f une application d'un ensemble $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ vers un ensemble F.

f est parfaitement définie par la donnée de $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p)$

A chaque application f de E vers F correspond donc un et un seul p-uplets $(f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p))$ d'éléments de E. Et réciproquement à chaque p-uplets $(b_1, b_2, ..., b_p)$ d'éléments de F correspond une et une seule application f (qui est définie par $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$, ..., $b_p = f(a_p)$).

Le nombre d'applications de E vers F est donc égal au nombre de p-uplets d'éléments de F

Si $CardF = n$, le nombre de p-uplets éléments de F est $(CardF)^p = n^p$. D'où :

Théorème

Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments est n^p

Si f est injective, $f(a_1)$, $f(a_2)$,..., $f(a_p)$ sont tous distincts

- 0n a n choix pour l'image a_1
- n – 1 choix pour a_2
- ....
- n – p + 1 choix pour l'image de a_p.

Théorème

Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments (avec $p \leq n$) est égal à n (n – 1)(n -2)....(n – p + 1).

Puisque si $CardE = CardF$, et où $f : E \to F$ est injective, alors f est bijective, on a, le nombre de bijection de E vers F avec $CardE = CardF$

Théorème

Le nombre du bijections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à n éléments est égal au nombre d'arrangements de n éléments pris parmi n, .