Dénombrement

Notion de théorie des ensembles

1. Ensemble - Élément

Un ensemble E est une collection d'objets appelés éléments de E telle que quel que soit l'objet a, on peut dire sans ambiguïté que a est ou n'est pas un élément de E

Si a est un élément de E, on écrit $a \in E$, sinon $a \notin E$.

Deux ensembles E et F sont égaux, et on écrit E = F, s'ils possèdent les mêmes éléments.

Exemple

E est l'ensemble des personnels de l'école.

Le directeur est un élément de E , mais le premier ministre ne l'est pas

2. Cardinal d'un ensemble fini

On dit que E est un ensemble fini si on peut compter ses éléments. Le cardinal de E noté card E désigne son nombre d'élément.

Exemples

E = { 1, 2, a, b}, card E = 4

E est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égal à 6. card E = 7

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui n'a aucun élément. Card $\emptyset$ = 0 ;

Un ensemble qui n'a qu'un seul élément est un singleton.

3. Opérations sur les ensembles

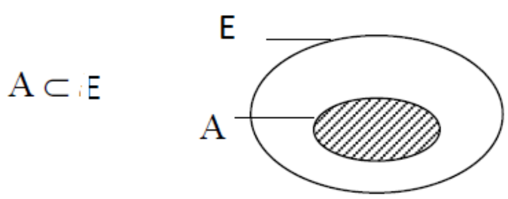
3.1 Partie d'un ensemble : Inclusion

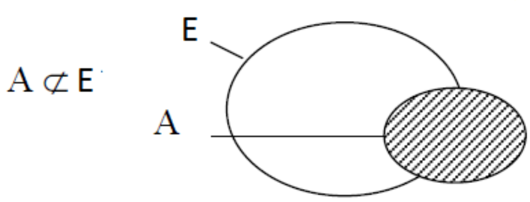
3.1.1 Définition

Soit A et E deux ensembles

On dit que A est une partie de E (ou un sous ensemble de E ou inclus dans E) si tous les éléments de A sont éléments de E.

On écrit $A \subset E$





Si $A \subset E$, alors $card\ A \leq card\ E$

3.1.2 Ensemble des parties :

Les parties d'un ensemble E constituent un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté : P(E)

P(E) = { A / $A \subset E$ }

on a card P(E) = $2^{\text{card } E}$

3.1.3 Complémentaire d'une partie

Soient A et E deux ensembles L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A est appelé complémentaire de A dans E et noté $\overline{A}$

On a : card $\overline{A}$ = card E – card A

Exemple

E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } et A les nombre pairs de E. $\overline{A}$ = { 1, 3, 5 }.

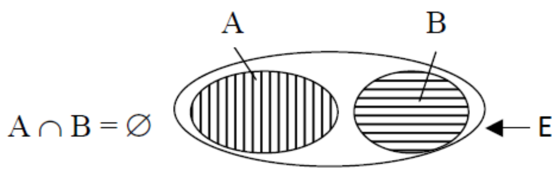
3.2 Réunion et intersection de deux ensembles

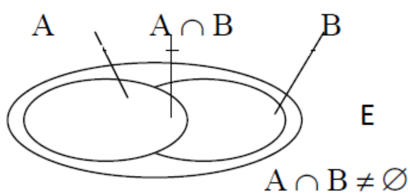
Soient A et B deux ensembles, la réunion de A et B notée A ∪ B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.

$$A \bigcup B = \{x / x \in A \, ou \, x \in B\}$$

Et l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et B est l'intersection de A et B et noté $A \cap B$.

$$A \bigcap B = \{x / x \in A \, et \, x \in B\}$$





On a :

$card\ A \bigcup B = card\ A + card\ B - card\ A \cap B$ et si $A \bigcap B = \Phi, A \bigcup B = card\ A + card\ B$

3.3 Partition d'un ensemble

Soient E un ensemble et $A_1, A_2, \ldots A_n$ des parties de E

{ $A_1, A_2, \ldots A_n$ } est une partition de E si les A_i sont tous non vides et si pour tout x élément de E, il existe un et un seul A_i tel que $x \in A_i$

{ $A_1, A_2, \ldots A_n$ } est une partition de E si

(1) $A_i \neq \emptyset$ pour tout i,

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$,

(3) $\coprod_{1=1}^{n} A_i = E$

on a card E = card A_1 + card A_2,+ …+ card A

3.4 Ensemble produit

3.4.1 Définition

On appelle produit (cartésien) de A et B l'ensemble des couples (x ;y) tels que $x \in A$ et . $x \in B$ On le note : A X B .A X B = { (x ; y), $x \in A$ et $x \in B$ }

on a card A X B = card A. card B

Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $B = \{y_1, \dots, y_p\}$.

on peut alors représenter tous les éléments de A X B sous formes de tableau à n lignes et p colonnes

(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	$\cdots$	(x_1, y_p)
(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	$\cdots$	(x_2, y_p)
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	$\cdots$	(x_n, y_p)

3.4.2 Généralisation :

$A_1 \times A_2 \times \quad \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) / \ x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, \text{et } x_n \in A_n\}$

Ses éléments sont appelés des n-uplets, n-uples, n-tuples, ou n-listes

si $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, A_1 X A_2 X… X A_n = A X A X...X A = A^n.

Dénombrement

4. Les nouveaux nombres

4.1 le nombre factorielle

Pour tout entier naturel n, on définit et on note le nombre factorielle n par :

0! =1 et pour n>0 n! =n.(n-1).(n-2)….3.2.1.

Ainsi : 1! =1, 2!=2, 4!=4x3x2x1= 24, 8!=8x7x6x5x4x3x2x1=40320.

4.2 le nombre A_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

- A_n^p = 0 si p > n
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$.

Ainsi: $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!}$ = 720

4.3 Le nombre C_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

- C_n^p = 0 si p > n
- $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \leq n$.

Ainsi : C 3 10 = $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!(10-3)!}$ =120 ;

5. Dénombrement

5.1 Arrangement avec répétition

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E. Ici p désigne un entier naturel. Dans un arrangement, on doit respecter l'ordre, mais un élément quelconque de E peut revenir autant de fois que l'on veut dans une suite.

Si card E = n. Le nombre d'arrangement d'élément de E est : N = n^p .

5.2 Arrangement sans répétition

Un arrangement sans répétition de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.Ici p désigne un entier naturel. Dans ce genre d'arrangement, on doit aussi respecter l'ordre, et, éviter de faire revenir une deuxième fois un élément déjà choisi.

Dans le cas où n=p, on parle de permutation.

Si card E = n, le nombre d'arrangement sans répétition d'éléments de E est :

N = $A_n^p = \dfrac{n}{(n-p)!}$

5.3 Combinaison

Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments. Dans une combinaison, il n'y a plus d'ordre .

Si card E = n , le nombre de combinaison de p éléments de E est : N = $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

5.4 Règle du produit

Si on peut choisir un objet A de α façons, et un objet B de β façons, alors on peut choisir A puis B de α . β façons.

5.5 Exercice résolu

Un sac contient 9 jetons indiscernable au toucher et portant les numéros 1 2, 3,…, 9.

1) 0n tire successivement trois jetons du sac , en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. 0n écrit côte à côte chacun des trois chiffres tirées dans l'ordre du tirage. 0n obtient ainsi un nombre à trois chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

2) 0n tire successivement sans remise trois jetons du sac. 0n place es jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombre de 3 chiffres ?

3) 0n procède au tirage de trois jetons simultanément. Quel est le nombre de tirage possible ?

Réponse

1) Exemples de résultats: 232,551, 333,124, … C'est un arrangement avec répétition, leur nombre est donc : N = 9^3 =729.

2) Exemples de résultats : 145, 541,415, 321, ... C'est un arrangement sans répétition, leur nombre est donc : $A_9^3 = \frac{9}{(9-3)!}$ = 504 .

3) Exemples de résultats : Il s'agit de combinaison. Il y a donc C_9^3 = 84 cas possibles.

5.6 Fiche méthode

Résumons dans un tableau l'utilisation de ces formules.

Successifs = avec ordre		Simultané = sans ordre
Avec remise = un objet peut revenir	Avec remise = un objet ne peut plus revenir	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
n^p	$A_n^p = \frac{n}{(n-p)!}$	