Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1) a) $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$ b) $2\sin x+1=0$ c) $2\sin x-\sqrt{2}=0$ d) $2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{2}=0$

2) a) $\cos 2x=\cos(\frac{2\pi}{3})$ b) $\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\cos(3x+\frac{\pi}{4})+1=0$ d) $2\cos(3x+\frac{\pi}{4})=1$

3) a) $\sin x-\sin 2x=0$ b) $\sin^2 x-1=0$ c) $2\cos^2 x-1=0$ d) $\sin^2 x+\sin x=0$

4) a) $\sin x-\cos x=0$ b) $\sin^2 x-\cos^2 x=0$ c) $\sin 2x=\cos(x)$

5) a) $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ b) $\sin x=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ c) $\sin(\frac{\pi}{3}-x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

6) a) $\tan x+1=0$ b) $\tan(\frac{\pi}{3}-x)=\tan x$ c) $\tan x=\tan 2x$ d) $\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)=1$

e) $\tan 2x+\tan 3x=0$ g) $4\sin^2 x=\tan x$ h) $\tan 2x+\tan x=1$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes (en faisant un changement d'inconnue)

a) $\sin^2 x+\sin x-2=0$ b) $4\sin^2 x+2(\sqrt{3}-1)\sin x-\sqrt{3}=0$

c) $\cos^2 x-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\cos x+\frac{\sqrt{2}}{4}=0$ d) $\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-\sqrt{3}=0$

e) $\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-\sqrt{3}=0$ f) $\cos 2x-\cos x-\sin^2 x+1=0$

Exercice 3

Résoudre l'équation $\cos x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ après avoir calculé cos2x

Exercice 4

Résoudre l'équation $\tan x=2-\sqrt{3}$ (avec $0<x<\frac{\pi}{2}$) après avoir calculé sin 2x en fonction de tanx.

Exercice 5

Deux nombres a et b de l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}[$ vérifient $a+b=\frac{\pi}{3}$ et $\tan a+\tan b=\frac{3\sqrt{3}}{3}$

Calculer tan(a+b), tan a.tanb, puis tan a et tan b

Exercice 6

Montrer que $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ et $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, puis résoudre l'équation $\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\frac{3}{4}$

Exercice 7

Résoudre chacune des équations suivantes après avoir transformé le premier membre

a) $\sin 2x+\cos 2x=0$ **b)** $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ **c)** $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2$ **d)** $\tan x=\sqrt{3}$

Exercice 8

a) Montrer que quel que soit le réel x, $\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$

b) Développer $(\cos^2 x+\sin^2 x)^3$.

c) En utilisant les résultats précédents, montrer que, quel que soit x,

$\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{1}{8}(5+3\cos 4x)$

Exercice 9

Montrer que $\cos^4 x+\sin^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{4}$, puis résoudre l'équation

$\cos^4 x+\sin^4 x=\dfrac{1}{8}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\sin 2x+\dfrac{3}{4}$

Exercice10

Résoudre les inéquations suivantes

a) $2\sin x-1\geqslant 0$ b) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $2\cos x-\sqrt{2}\leqslant 0$ d) $\tan x\geqslant\sqrt{3}$ e) $-1<\tan x<1$

Exercice 11

Résoudre dans $[0;2\pi]$

a) $2\sin^2 x+\sin x-1\leqslant 0$ b) $2\cos^2 x+5\cos x+2>0$ c) $\sin 2x+\cos x\geqslant 0$

d) $-\dfrac{1}{2}<\sin x<\dfrac{1}{2}$ e) $\cos x.\sin x<0$ f) $\cos x<\sin x$

g) $\cos^2 x<\sin^2 x$ h) $\sin x+\cos x\geqslant\sqrt{2}$ i) $\sqrt{3}\cos x-\sin x\geqslant\sqrt{2}$