Trigonométrie : équations et inéquations

On rappelle que $\begin{array}{l}\cos(x+2k\pi)=\cos x\\ \sin(x+2k\pi)=\sin x\end{array}$ quels que soient $x \in R \;\; et \;\; k \in Z$

$$\tan(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$$
$$\tan(x+\pi)=\tan x$$
$$\tan(x+k\pi)=\tan x \quad \text{quel que soit} \quad k \in Z$$

1. Équation cos x = a, $a \in R$

- Si $|a|>1$, équation n'admet aucune solution
- Si $|a|\leq 1$, on a une infinité de solution. En effet si α est solution, (c'est-à-dire $\cos\alpha = a$), $-\alpha$ est aussi solution (car $\cos(-\alpha)=\cos\alpha = a$)

Et comme $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha = a$ quel que soit $k \in Z$, $\alpha+2k\pi$ est aussi solution, de même que $-\alpha+2k\pi$
En admettant que ce sont les seules solutions, on a

Théorème :

$$\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+2k\pi \;\; ou \;\; x=-\alpha+2k\pi \quad (k\in Z)$$

Cas général :

$$\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+2k\pi \;\; ou \;\; f(x)=-g(x)+2k\pi \quad (k\in Z)$$

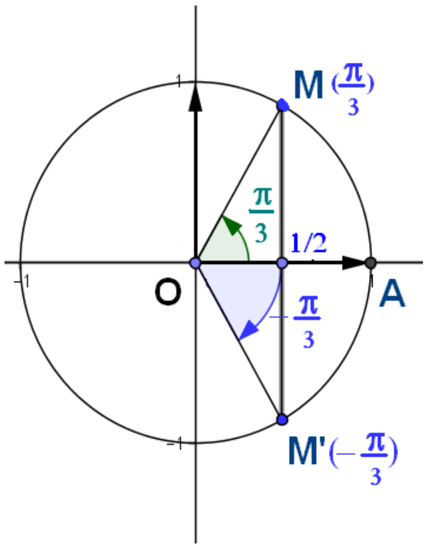
Exemple :

- Résoudre 2cosx-1=0

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\; ou \;\; x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi \;,\; -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\} \quad (k,k'\in Z)}$$



- Résoudre $\cos^2(2x+\frac{\pi}{3})+2\cos(2x+\frac{\pi}{3})-3=0$

Posons $X=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$

$$X^2+2X-3=0$$
$$(X-1)(X+3)=0$$
$$\cos(2x+\frac{\pi}{3})=1 \quad ou \quad \cos(2x+\frac{\pi}{3})=-3$$
$$2x+\frac{\pi}{3}=0+2k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=k\pi-\frac{\pi}{6}$$
$$\cos(2k+\frac{\pi}{3})=-3 \ n'a \ pas \ de \ solution$$

$$\boxed{S=\left\{k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in Z\right\}}$$

2. Équation sin x = a

- Si $|a|>1$ pas de solution
- Si $|a|\leq 1$ on a une infinité de solution

Si α est solution

Comme $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\pi-\alpha$ est aussi solution, donc $\pi-\alpha+2k\pi$ $(k\in Z)$ aussi

En admettant que ce sont les seules solutions on a :

Théorème :

$$\sin x=\sin\boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow x=\boldsymbol{\alpha}+2k\boldsymbol{\pi} \ \ ou \ \ x=\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\alpha}+2k\boldsymbol{\pi} \quad (k\in Z)$$

Plus généralement

$$\sin f(x)=\sin g(x)=f(x)=g(x)+2k\boldsymbol{\pi} \quad ou \quad f(x)=\boldsymbol{\pi}-g(x)+2k\boldsymbol{\pi} \ \ (k\in Z)$$

Exemples :

- Résoudre $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(x+\frac{\pi}{4})$

  - $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(x+\frac{\pi}{4})$

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4})$

(1) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$

$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

$3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi$

$x = \dfrac{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi + \pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \,,\, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in Z)\right\}}$$

- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

  - Posons $X = \sin x$

L'équation s'écrit $2X^2$ **- 5X +2 = 0**

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$X' = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad X'' = \frac{8}{4} = 2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = 2$

$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\sin x = 2$ n'a pas de solution

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,,\, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)\right\}}$$

3. Équation a.cosx+ b.sinx=c

Posons $S = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$

On a alors $S = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

Ce qui signifie que OM = 1 où M est le point de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \,,\, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Ainsi le point $M\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} , \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique.

Soit $\theta = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$, alors $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

S peut s'écrire alors

$$S = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$$

Et l'équation s'écrit $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) = c$ ou $\cos(x-\theta) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

En résumé, on a : $a\cos x + b\sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta) = c \Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

avec $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et on retrouve le cas cos x = a

Exemple :

Résoudre $\cos x - \sin x = 1$

$a = 1$ et $b = -1$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{1^2+(-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin \pi - \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ et $\qquad -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos \pi - \dfrac{\pi}{4}$

donc $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(\dfrac{3\pi}{4} + x)$

$\sqrt{2}\sin(x - \dfrac{3\pi}{4}) = 1$ équivaut à $\sin(x - \dfrac{3\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

Et les solutions sont les réels x tels que

$x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\qquad\qquad$ $x = 2k\pi$

Et $\boxed{S = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ 2k\pi \ , \ k \ , (k \in Z)\right\}}$

4. Équation tanx = a

Théorème :

Quel que soit le réel a, l'équation $\tan x = a$ admet toujours une infinité de solution.

Si α est solution, $\alpha + k\pi$ est aussi solution, quel que soit $k \in Z$, $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

Exemple : tan x -1 = 0

$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in Z}$$

5. Images des solutions d'une équation

L'image d'une solution α d'une équation est le point M du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = \alpha$

- Si les solutions sont de la forme $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $n \geq 3$ les images des solutions forment un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Si n = 3, on a un triangle équilatéral
Si n = 4, on a un carré,
Si n = 5 , on a un pentagone régulier
…..

- si n = 1, on un seul point
- si n = 2, on a deux points symétriques par rapport à l'origine du repère

6. Exemples d'inéquation trigonométrique:

- Résoudre $2\cos x - 1 > 0$

$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x > \frac{1}{2}$ si et seulement si l'image de x appartient à l'arc (orienté) MM'

Les solutions de l'inéquation sont donc les réels x tels que

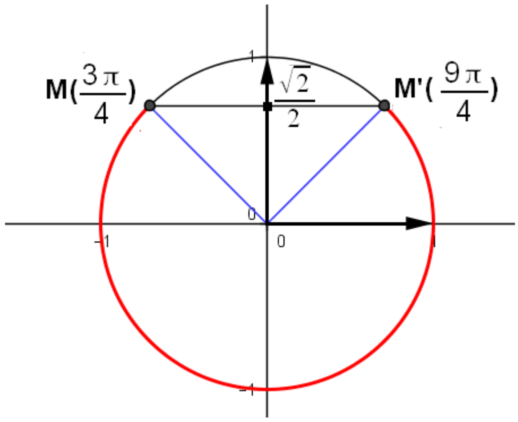
Et $$\boxed{S = \bigcup_{k\in Z} \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[}$$

- Résoudre 2sinx – $\sqrt{2} \leqslant 0$

$\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

x est solution de $2\sin x - \sqrt{2} \leqslant 0$ si et seulement si son image appartient à l'arc (orienté) $\overset{\frown}{MM'}$

Donc les solutions de $2\sin x - \sqrt{2} \leqslant 0$ sont les réels x tels que $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$



Et $\boxed{S = \bigcup_{k \in Z} \left] \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad \frac{9\pi}{4} + 2k\pi \right[}$

- $\tan x > \sqrt{3}$

  $\tan x = \sqrt{3}$ si et seulement si $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

  donc $\tan x > \sqrt{3}$ si l'image de x appartient à l'arc MB

  Les solutions sont donc les réels x tels que

  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$

  Et $\boxed{S = \bigcup_{k \in Z} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \right]}$