Composées de deux transformations : exercices

Dans les exercices suivants, S_A *désigne la symétrie de centre A,* $S_{(d)}$ *la symétrie orthogonale d'axe (d),* $t_{\vec{u}}$ *la translation de vecteur* $\vec{u}$ *,* $h(\Omega,k)$ *et* $R(\Omega,\theta)$ *la rotation de centre Ω et d'angle θ.*

Exercice 1
A et B sont deux points non confondus.
Préciser la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
- $S_A \circ S_B$
- $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_A \circ S_B$
- $S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$

Exercice 2
ABC est un triangle équilatéral.
Préciser la transformation $S_A \circ S_B \circ S_C$.

Exercice 3
Soit (d) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).
Comparer $S_{(d)} \circ t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{u}} \circ S_{(d)}$.

Exercice 4
ABCD est un rectangle.
Préciser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$

Exercice 5

Quelle est l'image par $S_{(d)} \circ t_{\vec{u}}$
- d'un triangle équilatéral de côté d?
- d'un carré de côté d?
- d'un cercle de rayon r ?

Exercice 6

Quelle est l'image par $h(\Omega,k) \circ t_{\vec{u}}$
- d'un triangle équilatéral de côté d ?
- d'un carré de côté d ?
- d'un cercle de rayon r ?

Exercice 7
Quelle est l'image par $R(\Omega,\theta) \circ t_{\vec{u}}$
- d'un triangle équilatéral de côté d ?
- d'un carré de côté d ?
- d'un cercle de rayon r ?

Exercice 8
Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et h une homothétie de centre O et de rapport k différent de 1.
On pose f = h o t.
1-a) Soit M un point et M' son image par f.
Montrer que $\overrightarrow{OM}=k\,\overrightarrow{OM}+k\,\vec{u}$.
b) Montrer que Ω_1 est un point invariant par f si, et seulement si $\overrightarrow{O\Omega_1}=k\,\overrightarrow{O\Omega_1}+k\,\vec{u}$.
En déduire l'existence et l'unicité d'un tel point Ω_1 , tel que $\overrightarrow{O\Omega_1}=\frac{k}{1-k}\vec{u}$.
c) Montrer alors que $\overrightarrow{\Omega_1 M'}=k\,\overrightarrow{\Omega_1 M}$. Quelle est la nature de l'application f ?
2- De la même façon, montrer que l'application g définie par g = t o h est une homothétie de rapport k et de centre Ω_2 tel que $\overrightarrow{O\Omega_2}=\frac{1}{1-k}\vec{u}$.
3- Montrer que $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}=\vec{u}$.
Dans quel cas a-t-on $h \circ t = t \circ h$?