PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE -PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

1. PPCM de deux nombres entiers

1.1 Définitions

Notons A l'ensemble des multiples d'un entier a et B l'ensemble des multiples d'un entier b

$A=\{k\cdot a/k\in\mathbb{N}\}=\{0,a,2a,3a,....\}$ et $B=\{k\cdot b/k\in\mathbb{N}\}=\{0,b,2b,3b,....\}$

L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble $A\cap B$ formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Le plus petit commun multiple de a et b, noté PPCM (a,b) est le plus petit élément non nul de cet ensemble.

Exemple

Les multiples de 6 sont 6, 12, 18, 24,… ; ceux de 4 sont : 4, 8, 12, 16 ….

Donc PPCM(4;6) =12

Remarques

- PPCM(a ; b) = PPCM(b ; a)
- PPCM(1 ; a) =a
- PPCM(a ; a) =a

2. Propriétés

- Les multiples communs à a et à b sont les multiples de PPCM(a;b)
- PPCM (k.a;k.b) = k. PPCM (a;b)

2. PGCD de deux nombres entiers

2.1 Définitions

Notons A l'ensemble des diviseurs d'un entier a et B l'ensemble des diviseurs d'un entier b

L'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble $A\cap B$ formé des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

Le plus petit grand diviseur de a et b, noté PGCD (a,b) est le plus grand élément non nul de cet ensemble.

Si PGCD (a;b) = 1 , on dit que a et b sont premiers entre eux.

Exemples

Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24; ceux de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9, et 18

Donc PGCD (24;18) =6

Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28; ceux de 35 sont : 1, 5, 7, 35

Donc PGCD (28;35) =7

Remarques

- PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a)
- PGCD(1 ; a) =1

- PGCD(a ; a) =a

2. Propriétés

- Les diviseurs communs à a et à b sont les diviseurs de PGCD (a;b)
- PGCD (k.a;k.b) = k. PGCD (a;b)

b) Algorithme d'Euclide

· **Propriété**

Si d est un diviseur commun à a et b alors il est aussi un diviseur de a et bq.

Il divise donc aussi r = a – bq

Donc d est un diviseur commun à b et r.

· Si d' est un diviseur commun à b et r alors il divise aussi bq et r.

Il divise donc aussi a = bq + r

Donc d' est un diviseur commun a a et b.

Ainsi, l'ensemble des diviseurs communs à a et b et l'ensemble des diviseurs communs à b et r ont les mêmes éléments et donc le même plus grand élément

On a donc bien PGCD(a ;b) = PGCD(b ;r).

Application

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, avec a ≥ b.

On définit la suite (r_n) d'entiers naturels de la façon suivante :

· r_0 = b ;

· r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b ;

· Pour n ≥ 1 : si r_n = 0, alors r_{n+1} = 0 ;

Si $r_n \neq 0$, alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n

Alors il existe un entier p tel que $r_p \neq 0$ et, $r_n = 0$.
On a alors **r_p = PGCD(a ;b) : le PGCD(a ;b) est le dernier reste non nul obtenu par l'algorithme**

Exemples

- Déterminer le PGCD (2016;456)

Étape	a	b	reste
1	2016	456	192
2	456	192	72
3	192	72	48
4	72	48	24
5	48	24	0

Division euclidienne
2016= 456 **x** 4+192
456 =192 **x** 2+72
192 =72 **x** 2+48
72 = 48 **x**1+24
48 = 24 **x** 2+0

24 est le dernier reste non nul donc PGCD (2016;456)=24

- Déterminer le PGCD (726;162)

Étape	a	b	reste
1	726	162	78
2	162	78	6
3	78	6	0

PGCD (726;162) =6

- Déterminer le PGCD (6856;632)

Étape	a	b	reste
1	6856	632	536
2	632	536	96
3	536	96	56
4	96	56	40
5	56	40	16
6	40	16	8
7	16	8	0

Donc PGCD (6856;632)=8