Dérivation d'une fonction

1. Dérivabilité en un point – Nombre dérivé

1.1 Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie en x_0. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée nombre dérivé de f en x_0 ; on la note $f'(x_0)$

On a donc $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou, en posant $x=x_0+h$, $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Exemple : $f(x)=x^2+x-1$

f est-elle dérivable en $x_0=1$?

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-1)-(1+1-1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x+2)\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$$

On a une limite finie, donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$ ..

1.2 Définition équivalente

f est dérivable en x_0 si pour tout h tel que h appartient à I, on peut écrire

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0.$$

Avec cette formulation de la définition, le réel a est le nombre dérivé de f en x_0

Démonstration :

Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction φ définie par $\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-a \text{ si } x\neq 0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$

On a alors pour tout h tel que x_0+h appartient à I, $f(x_0+h)=f(x_0)+a.h+h\varphi(h)$

$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ équivaut à $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$

Ce qui établit l'équivalence.

L'écriture $f(x_0 + h) = f(x_0) + a.h + h\varphi(h)$ est appelée développement limité d'ordre 1 de f au point x_0.

Remarque

Dès que l'on rencontre une écriture $f(x_0 + h) = \alpha + \beta.h + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ *on peut conclure que :*

$\alpha = f(x_0)$, *que f est dérivable en* x_0 et $\beta = f'(x_0)$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + h\varphi(h)$ donc $f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0).h = h\varphi(h)$

Et lorsque h tend vers 0, $\varphi(h)$ tend aussi vers 0 ; ce qui fait que lorsque h est très proche de 0, alors $f(x_0 + h)$ est aussi très proche de $f(x_0) + f'(x_0).h$

L'erreur commise en prenant $f(x_0) + f'(x_0).h$ comme valeur approchée de $f(x_0 + h)$ est

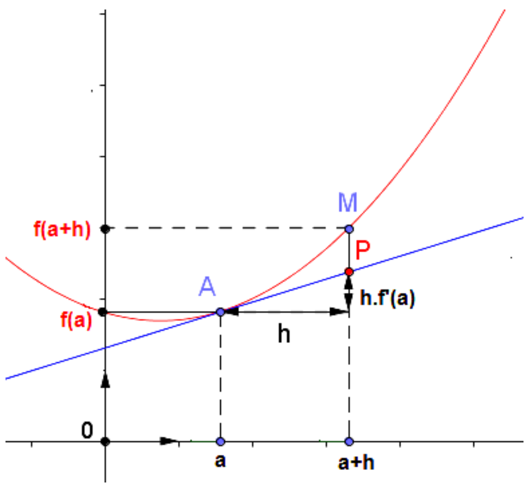
$h\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0).h$

En utilisant la variable x, le développement limité de f en a s'écrit :

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$

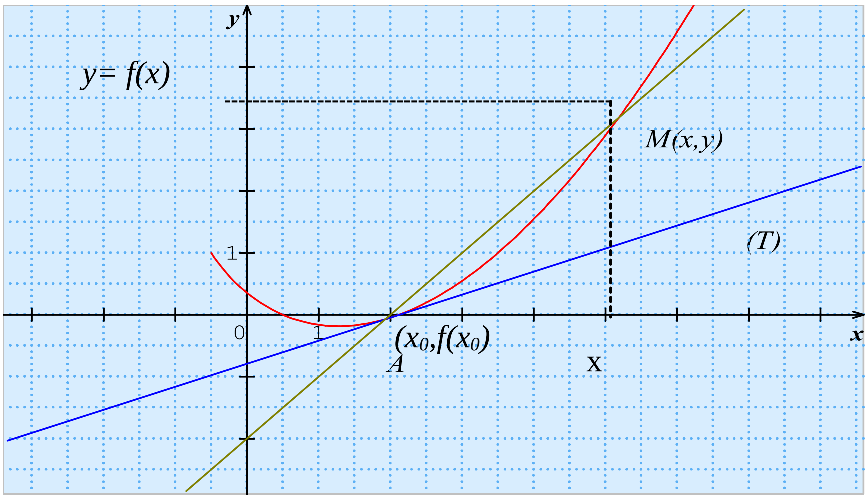
La fonction $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0

Interprétation graphique :



$|h.\varphi(h)|$ *représente la distance PM. Plus M se rapproche de A, plus la distance devient très petite*

1.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé



Soit (ζ_f) la courbe représentative d'une fonction f et $A(x_0\,;f(x_0))$ et $M(x,f(x))$ deux points de (ζ_f).

Considérons la droite (AM) ; elle a pour pente (ou coefficient directeur) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

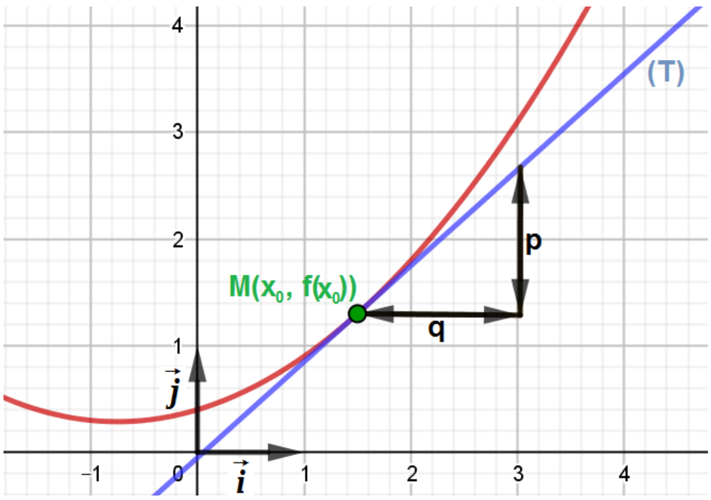
Si on fait tendre M vers A, x va tendre vers x_0 et la droite (AM) va tendre vers une position limite (T) appelée droite tangente à la courbe au point A,, et sa pente tend vers $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x)$ (pente de (T)) : c'est la tangente de l'angle que fait la droite (T) avec l'axe des abscisses.

Considérons un point M(x,y) de (T), on doit avoir : $\tan\alpha = f'(x_0)=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$

ou $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ c'est l'équation de la tangente (T) à la courbe (ζ_f) au point A(x_0 ;f(x_0))

Remarques

- Si $f'(x_0)=\frac{p}{q}$, alors



- Si $f'(x_0) = 0$, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale).
- Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$, f n'est pas dérivable en x_0, on a une tangente parallèle à l'axe des ordonnées
- Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, (f n'est pas dérivable en x_0) on a deux demi tangentes à gauche et à droite de M_0, de pentes respectives $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$. On dit que l'on a un point anguleux.

1.4 Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droite en x_0 (respectivement à gauche) si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0^+ (respectivement vers x_0^-)

Les limites lorsqu'elles existent, sont appelées respectivement nombre dérivé à gauche et nombre dérivé à droite de x_0, et notés $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$

$$f_d'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ et } f_g'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$, lorsqu'elles sont finies

Théorème

Pour qu'une fonction f soit dérivable en x_0 ; il faut et il suffit que les nombres dérivés à gauche et à droite soient finis et égaux, c'est-à-dire si :

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ (finie)}$$

2. Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définitions

f est dérivable sur $]a,b[$ si elle est dérivable en chaque point de cet intervalle.

f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à gauche en b et dérivable à droite en a.

Théorème

Si f est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.

Démonstration : f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ est un réel } l$$

Posons $\begin{cases} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \text{ si } x \neq x_0 \\ \varphi(x_0) = 0 \end{cases}$

On a $f(x) = [\varphi(x) + l](x - x_0) + f(x_0)$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) + l(x - x_0)]$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x)(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x - x_0)$$

Or $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)(x - x_0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} l(x - x_0) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. D'où la continuité de f en 0.