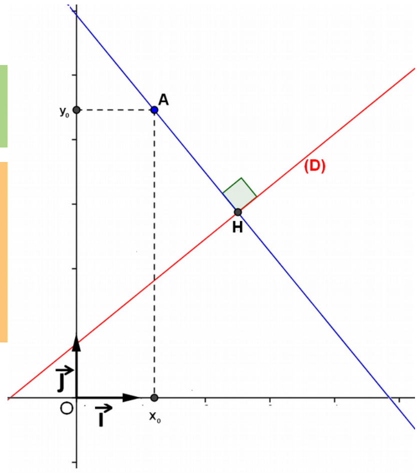
Séquence 2 : Position relative entre droites et cercles

1. Distance d'un point à une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit (D) une droite, A un point du plan et H le pied de la perpendiculaire à (D) passant par A (projeté orthogonal de A sur (D)).



La **distance de A à (D)**, notée d(A,(D)) est la distance AH.

Si (D) a pour équation ax + by +c =0 et A (x_0;y_0), alors la distance de A à (D) est $d(A,(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exemple

Déterminer la distance de O et A(-3,2) à la droite d'équation (D) d'équation 4x+3y+9 =0

- $d(O,(D))=\frac{|4\,x\,0+3\,x\,0+9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{9}{\sqrt{25}}$

  $d(O,(D))=\frac{9}{\sqrt{5}}$

- $d(A,(D))=\frac{|4\,x(-2)+3\,x\,3+9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}$

  $d(A,(D))=2$

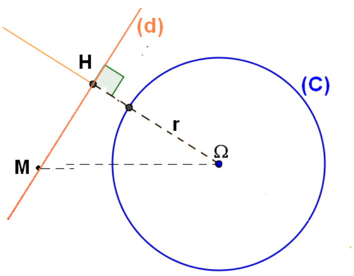
2. Position relative d'une droite et d'un cercle

2.1 Théorème

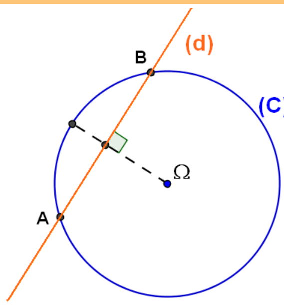
Soit (d) une droite et (C) un cercle de centre Ω et de rayon r.

- Si d(Ω , (d)) > r, alors (d) et (C) ne se rencontrent pas (pas de point commun) ;
- Si d(Ω , (d)) < r, alors (d) et (C) ont exactement deux points communs :
- Si d(Ω , (d)) = r, alors (d) et (C) ont un seul point commun.

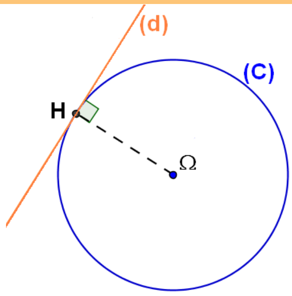
Dans le dernier cas, on dit que la droite (d) est tangente au cercle (C).



(C) et (d) ne se rencontrent pas



(C) et (d) ont deux points communs



(C) et (d) ont un seul point commun

Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur (d). Un point M de (d) est sur (C) si $\Omega M^2=r^2$.

Par le théorème de Pythagore, on a $\Omega M^2=\Omega H^2+HM^2=d(\Omega,(d))^2+HM^2$.

$M\in(C)$ si $\Omega M^2=r^2$. Donc $r^2=d(\Omega,(d))^2+HM^2$

Ainsi $HM^2=r^2-d(\Omega,(d))^2$.

Il existe zéro, deux ou une solution selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif, ou nul.

2.2 Étude algébrique

Pour déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection, on résout le système

$$\begin{cases}\text{équation du cercle (C)}\\ \text{équation de la droite (d)}\end{cases}$$

Exemple

Déterminer le ou les points d'intersection de la droite (d) d'équation 2x-y = 1 et le cercle (C) d'équation $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

Résolvons le système $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=2\\ 2x-y=1\end{cases}$

2x-y = 1 équivaut à y=2x-1.

En remplaçant y dans l'équation $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.par cette expression de y, on a $(x-1)^2+(2x-1-2)^2=2$.

Ce qui donne $(x-1)^2+(2x-3)^2=2$ ou $x^2-2x+1+4x^2+9-12x=2$

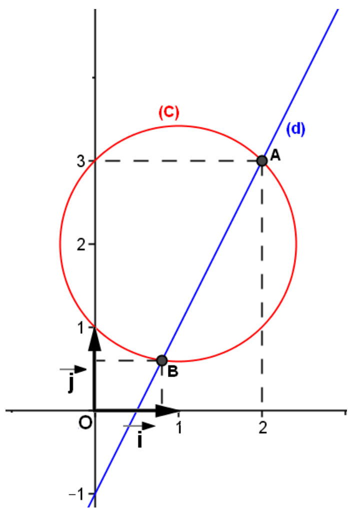
L'équation devient alors $5x^2-14x+8=0$

Calculons alors le discriminant $\Delta=(-14)^2-4x5x8=36=6^2$.

On a donc deux racines distinctes : $x'=\dfrac{-(-14)+6}{2.5}=2$

et $x'=\dfrac{-(-14)-6}{2.5}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

- Si x = 2, alors y=2.2-1 = 3
- Si $x=\dfrac{4}{5}$, $y=2\dfrac{4}{5}-1=\dfrac{3}{5}$.



On a donc deux points d'intersection $A(2;3)$ et $B(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5})$.

2.3 Équation de la droite tangente à un cercle

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon r, et soit A $(x_0\,;\,y_0)$ un point de ce cercle.

La **tangente** en A à ce cercle (C) est l'ensemble des points M(x ; y) vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0.$.

En effet, M appartient à cette tangente si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A\Omega}$ sont orthogonaux.

Cette égalité permet d'obtenir l'équation de la tangente.

Exemple

Soit (C) le cercle de centre Ω (1 ; 1) et de rayon $r=\sqrt{2}$ *. Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point A(2 ; 0).*

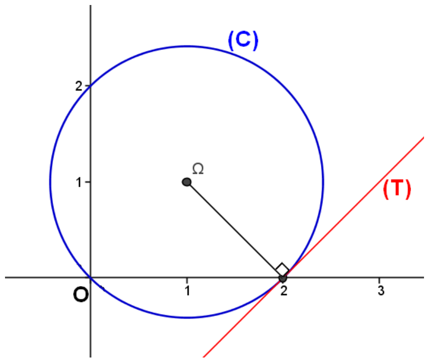
Un point M (x ; y) appartient à cette tangente si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$.

Déterminons les composants des vecteurs $\overrightarrow{AM}$. et $\overrightarrow{A\Omega}$;

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}1-2\\1-0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega M}=\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0$



Ce qui donne $(x-2)(-1)+y(1)=0$.

L'équation de la tangente (T) en A est donc $-x+y+2=0$ ou $y=x-2$.

3. Position relative de deux cercles

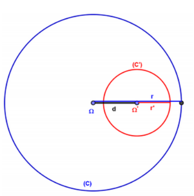
3.1 Théorème

Soient deux cercles (C) et (C') de centres respectifs Ω et Ω', et de rayon respectifs r et r'.

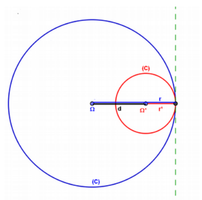
Posons d = ΩΩ'. Les différents cas sont les suivants :

- Si $d<|r-r'|$, (C) et (C') n'ont aucun point commun et l'un d'eux est intérieur a l'autre.
- Si $d=|r-r'|$, lorsque $r\neq r'$, (C) et (C') ont un point commun ou ils ont une tangente commune. Les cercles sont dits **tangents intérieurement ;** lorsque $r=r'$, ils sont **confondus.**
- Si $|r-r'|<d<r+r'$, les deux cercles ont deux points communs distincts.
- Si $d=r+r'$, les deux cercles ont un seul point commun en lequel ils ont une tangente commune. Les cercles sont dits **tangents extérieurement**.
- Si $d>r+r'$, les deux cercles n'ont aucun point commun et chacun est extérieur a l'autre.

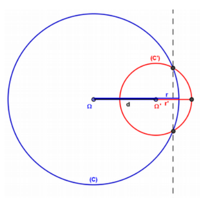
3.2 Les différentes positions



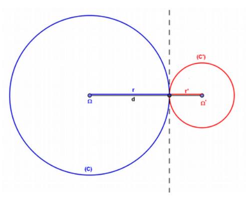
d < |r-r'|



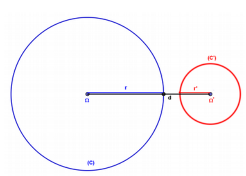
d = |r-r'|



$|r-r'|<$ d < r + r'



d =r + r'



d > r + r'