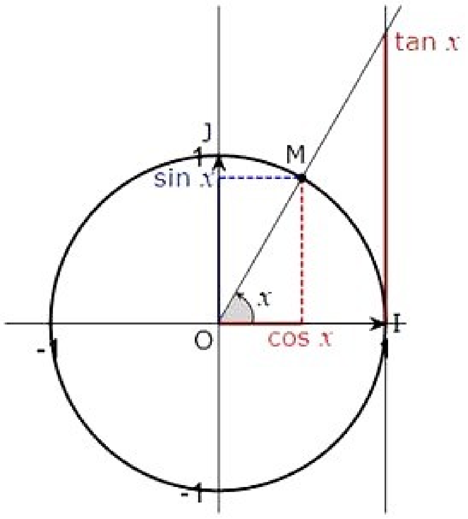
# Lignes trigonométriques

## 1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit C le cercle trigonométrique de centre O. On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ .

Soit x un réel et M le point de C tel que x soit la mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ .




On appelle **cosinus de x** et **sinus de x** et on note cos(x) et sin(x) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

M ( cos x , sin x ) et $\overrightarrow{OM} = (\cos x)\vec{i} + (\sin x)\vec{j}$

On appelle **tangente de x** le nombre :

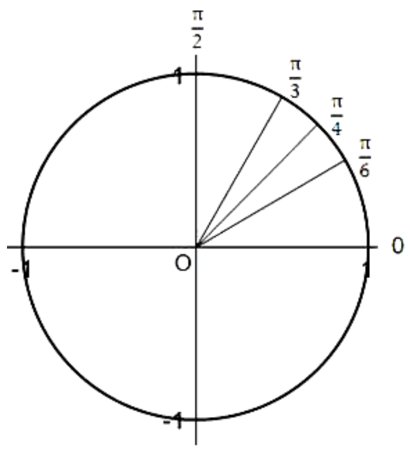
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ lorsque $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ .

## 2. Propriétés

Pour tout réel x,

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ ;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ;
- sin (x + 2.k.π ) = sin x et cos (x + 2.k.π ) = cos x pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ;
- tan (x + k.π ) = tan x pour tout $k \in \mathbb{Z}$

## 3. Valeurs remarquables

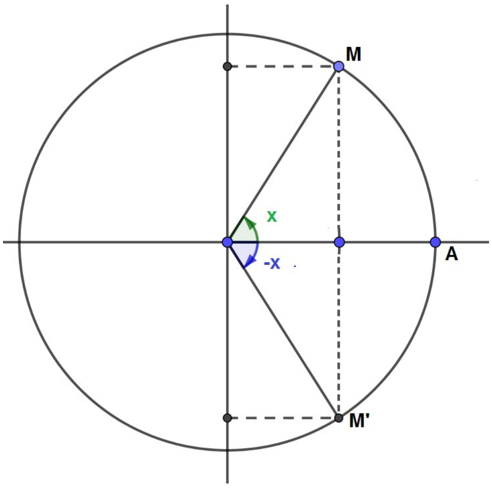



| $x$ (en rad) | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin $x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos $x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan $x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | |

# 4. Angles associés

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 4.1 Lignes trigonométriques de x et de -x




Considérons les points M et M' du cercle trigonométrique tels que : $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = -x$ (en rad).

Ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc ils ont même abscisse mais d'ordonnées opposées.

D'où les relations :

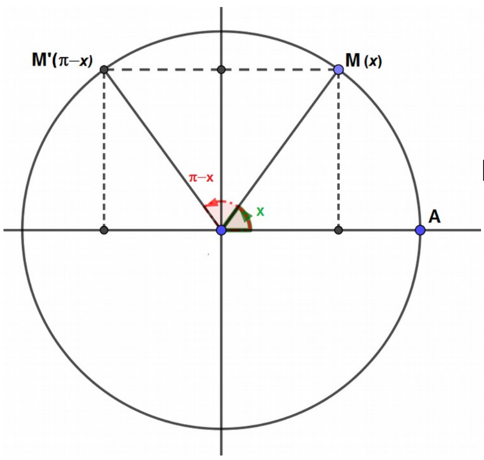
- cos(-x) = cos(x)
- sin(-x) = - sin(x)
- tan(-x) = - tan(x)

**Exemple :**

Calculer le cosinus et le sinus de $-\frac{\pi}{4}$ .

On a : $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mais $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## 4.2 Lignes trigonométriques en x et π - x



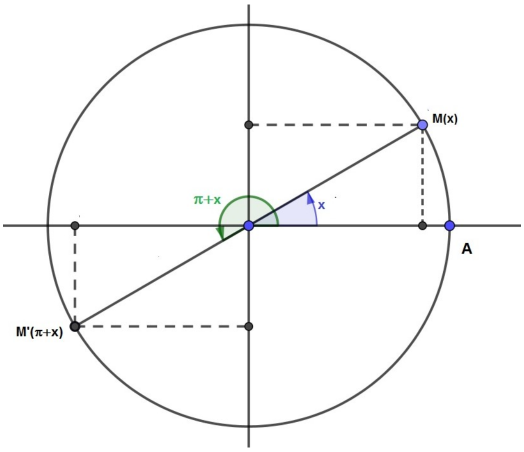

Les points M(x) et M'(π-x) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc ils ont la même ordonnée mais des abscisses opposées.

D'où les relations :

- cos(π-x) = - cos(x)
- sin(π-x) = sin(x)
- tan(π-x) = - tan(x)

Remarquons que *x* et π-*x* sont deux angles supplémentaires.

## 4.3 Lignes trigonométriques de x et π + x

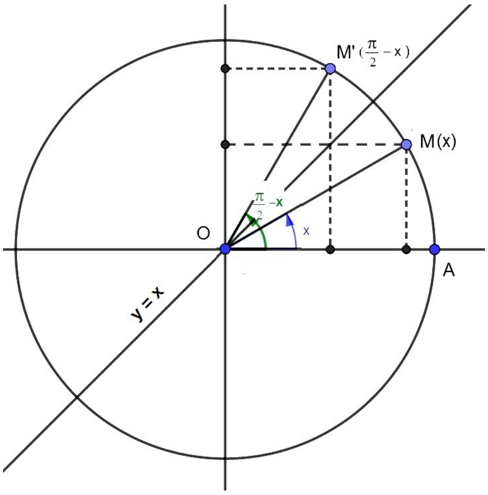



Les points M(x) et M'(π+x) sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- cos(π+x) = - cos(x)
- sin(π+x) = - sin(x)
- tan(π+x) = tan(x)

## 4.4 Lignes trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} - x$



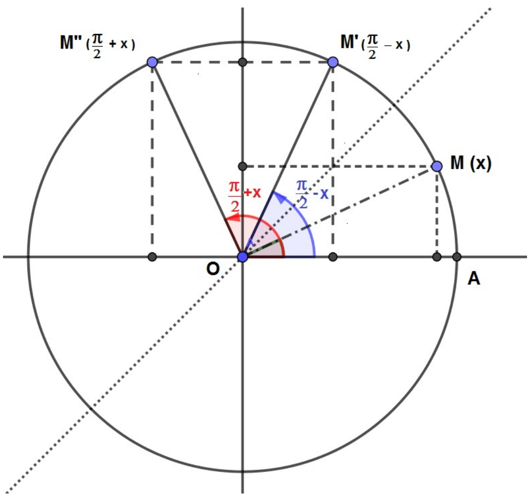

Les points M (x) et M' ( $\frac{\pi}{2} - x$ ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Remarquons que x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont complémentaires.

## 4.5 Lignes trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} + x$




Les points M'( $\frac{\pi}{2} + x$ ) et M''( $\frac{\pi}{2} - x$ ) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc leurs coordonnées sont opposées.

D'où les relations :

- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$

**Exemple :**

Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{7\pi}{6}$ .

On a $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ .

Donc :

- $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$