LOGIQUE:

1. Vocabulaires

1.1 Introduction

Considérons les phrases suivantes :

- 2+3= 5 (1)
- 2+3= 7 (2)

et aussi celles-ci, ou x et y représentent des entiers naturels

- x+3=12 (3)
- x+7 = 2 (4)

On peut étudier ces phrases de divers point de vue.D'abord d'un point de vue formel ; si on appelle variable une lettre qu'on peut remplacer par un élément quelconque d'un ensemble, on voit que les phrases (1) et (2) ne contiennent pas de variable , tandis que les phrases (3) et (4) en contiennent.

On peut aussi considérer le fait mathématique exprimé par chacune de ces phrases;la phrase (1) est vraie. La phrase (2) est fausse, pour (3) , on ne peut rien dire et (4) est fausse .

Les phrases (1) , (2) et (4) sont dites propositions.

1.2 Propositions

Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux.

Citons quelques exemples:

- « Le carré d'un nombre est positif ou nul » est une proposition vraie
- « La somme de deux nombres négatifs est négatif » est une proposition vraie
- « Il fait froid » n'est pas une proposition
- « 3 est un entier négatif » est une proposition fausse

1.3 Fonctions propositionnelles ou prédicat

Une fonction propositionnelle est une phrase dont la valeur de vérité dépend d'une variable.

- $x+3<7$ est une fonction propositionnelle, en effet pour des valeurs de x inférieur à 4, elle est vraie mais elle est fausse dans l'autre cas

1.4 Négation d'une proposition

La négation de la proposition p est la proposition qui est vraie si et seulement si p est fausse et fausse si et seulement si P est vraie. Elle est notée $\neg p$ ou $\overline{p}$ qui se lit non p.

Ainsi :

- La négation de 1 ≥ 3 est 1 < 3.
- La négation de x - 2 = 0 est x – 2 ≠ 0.

1.5 Table de vérité d'une proposition

C'est un tableau qui indique les issus possibles pour une proposition p.

p
V
F

A partir de cette table, on peut déduire la table de ¬p

p	¬p
V	F
F	V

Exercice : Citer 3 exemples de propositions fausses, puis 3 exemples de propositions fausses

2. Les connecteurs logiques

2.1 Le connecteur logique « et » :

Pour deux propositions p, q la proposition « p et q » notée p ∧ q est la nouvelle proposition qui est vraie si p et q le sont simultanément , fausse dans les autres cas.

Sa table de vérité est :

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple, si p est la proposition « cette carte est un roi »; q la proposition « cette carte est

un carreau »

La proposition p ∧ q est « cette carte est un roi de carreau »

2.2 Le connecteur logique « ou »

Pour deux propositions p, q la proposition « p ou q » notée p ∨ q est la nouvelle proposition qui est fausse si p et q le sont simultanément , vraie dans les autres cas.

Sa table de vérité est :

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Par exemple : pour les nombres à trois chiffres, P est la proposition « le nombre commence par 3 », Q la proposition « le nombre est pair ». la proposition « P ou Q » est le nombre commence par 3 ou pair.

Exercice :

- Dresser les tables de vérités de ¬(p ∧ q) puis ¬p ∨ ¬q. Comparer
- Dresser les tables de vérités de ¬(p v q) puis ¬p ∧ ¬q. Comparer

En conclusion, la négation de p ∧ q est ¬p ∨ ¬q. la négation de p v q est ¬p ∧ ¬q

2.3 Le connecteur logique « implique »

Pour deux propositions p, q la proposition « p implique q » notée p => q est la nouvelle proposition qui est fausse si p est vraie et q fausse , vraie dans les autres cas.

- p => q se lit souvent si p alors q, ou bien si p est vraie alors q est vraie.
- p => q a même table de vérité que ¬p ∧ q

Exercice : dresser la table de vérité de p v ¬q , puis ¬(¬p ∧ q)

Quelle est alors la négation de p => q ?

2.4 Contraposée d'une implication

- La contraposée de p => q est ¬q => ¬p

- table de vérité de p => q

p	q	P=>q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- table de vérité de ¬Q => ¬P

p	¬p	q	¬q	¬q => ¬p
V	F	V	F	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	F	V	V

- Exercice : trouver la contraposée de
- $x < -4 \Rightarrow x^2 > 16$
- $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$
- dire alors si les propositions sont vraies ou fausses.
- Attention : p =>q et q => p ne sont pas les même .

2.5 Le connecteur « équivalente » :

- Pour deux propositions p et q, la proposition p <=> q est la proposition qui est vraie si p et q sont fausses simultanément ou vraies simultanément.
- p <=> q est la proposition p => q et q => p

- sa table de vérité est :

p	q	p <=> q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- p <=> q se lit « p est équivalent à q », ou « p équivaut à q », ou « p si et seulement si q »

3 Les quantificateurs :

3.1 Quantificateurs universels :

Une proposition p peut dépendre d'un paramètre x, par exemple la proposition x + 1 > 0 peut être vraie ou fausse selon la valeur de x

Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté $\forall x$. La proposition $\forall x \in E$ p(x) est vraie lorsque, pour tout $x \in E$, la proposition p(x) est vraie.

Exemple :

- la proposition $\forall x \in [0 ; 1], x^2 \in [0 ; 1]$ est vraie
- la proposition $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est fausse
- $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est vraie

3.2 Quantificateurs existentiels :

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté $\exists$. La proposition $\exists x \in E$, p(x) est vraie lorsqu'il existe au moins un $x \in E$ telle que la proposition p(x) soit vraie.

Le quantificateur il existe un unique est noté $\exists!$. La proposition $\exists! x \in E$, p(x) est vraie lorsqu'il existe un unique $x \in E$ telle que la proposition p(x) soit vraie.

Par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}$ $x+1 = 0$ est vraie.
- $\exists x \in \mathbb{N}$ $x+1 = 0$ est fausse.

3.3 Négation des quantificateurs :

La négation de $\forall x \in E$, p(x) est $\exists x \in E$, non p(x) .

par exemple :

- La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est $\exists x \in \mathbb{R}$ $(x+1)^2 \neq x^2 + 2x + 1$. Cette négation est fausse.
- La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{[x]} \geq 0$ est $\exists x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{[x]} \leq 0$

La négation de $\exists x \in E$, P(x) est $\forall x \in E$, non P(x)

Exemple : la négation de $\exists x \in \mathbb{R}$, $x^2+x-2=0$ est $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2+x-2 \neq 0$.

3 .4 Succession de quantificateurs :

- On peut permuter deux quantificateurs de même nature

$\forall x \in E, \forall y \in E$ p(x, y) est équivalente à $\forall y \in E$, $\forall x \in E$ p(x, y)

- 0n ne peut pas permuter deux quantificateurs de nature différentes

3.5 Quelques méthodes de raisonnements:

- Par implication : pour prouver que p =>q est vraie, on suppose que p est vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que q est vraie.
- Par contraposée : pour démontrer que p => q, il suffit de démontrer la contraposée de cette proposition, c'est-à-dire ¬q => ¬p.
- Lorsque p =>q , on dit que p est une condition suffisante à q, et que q est une condition nécessaire à p.
- par l'absurde : pour démontrer que p =>q est vraie, on peut supposer que p et ¬q sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction; pour démontrer que p est vraie, on peut supposer que ¬p est vraie et obtenir une contradiction.