Équation du troisième degré

1. Définition

Un équation du troisième degré est une équation de la forme $ax^3+bx^2+cx+d=0$ où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $a \neq 0$

Un réel α est une solution de l'équation si $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

On dit aussi que α est racine du polynôme P de degré 3, défini par $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

2. Factorisation

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Pour un réel α , $P(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$

On a alors $P(x)-P(\alpha)=a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)$

Puisque $(x^3-\alpha^3)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$ et $(x^2-\alpha^2)=(x-\alpha)(x+\alpha)$, on a

$$P(x)-P(\alpha)=a(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)+b(x-\alpha)(x+\alpha)+c(x-\alpha)$$

$$= (x-\alpha)(a(x^2+\alpha x+\alpha^2)+b(x+\alpha)+c)$$

$$P(x)-P(\alpha)=(x-\alpha)(a x^2+(a\alpha+b)x+(\alpha^2+b\alpha+c))$$

$P(x)-P(\alpha)$ est de la forme $P(x)-P(\alpha)=(x-\alpha)(p x^2+q x+r)$ où p, q et r sont des nombres réels

On a donc quels que soit les réels x et α , $P(x)=(x-\alpha)(p x^2+q x+r)+P(\alpha)$

Ainsi si α est racine de P, $P(\alpha)=0$, et $P(x)=(x-\alpha)(p x^2+q x+r)$

Théorème

Soit P un polynôme de degré trois .

Un réel α est une racine de P si et seulement s'il existe trois réels p, q et r tels que $P(x)=(x-\alpha)(p x^2+q x+r)$

3. Résolution

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ et α une racine de P.

On cherche les réels p, q et r tels que $P(x)=(x-\alpha)(p x^2+q x+r)$ par la méthode des coefficients indéterminés ou par division euclidienne

On a P(x)=0 si et seulement si $x-\alpha=0$ ou $p x^2+q x+r=0$.

Pour pour achever la résolution, il reste à résoudre l'équation $p x^2+q x+r=0$

Exemple

Résoudre l'équation $x^3-4x^2+x+2=0$ sachant que 1 est racine .

Réponse :

1 est racine donc, il existe des réels p, q et r tels que $x^3-4x^2+x+2=(x-1)(px^2+qx+r)$

En développant le second membre de l'égalité, on a :

$x^3-4x^2+x+2=px^3+(q-p)x^2+(r-q)x-r$.

Par identification des coefficients des termes de même degré, on a $\begin{cases} p=1 \\ q-p=-4 \\ r-q=1 \\ -r=2 \end{cases}$,

ce qui donne $\begin{cases} p=1 \\ q=-3 \\ r=-2 \end{cases}$ et $x^3-4x^2+x+2=(x-1)(x^2-3x-2)$

$x^3-4x^2+x+2=0$ si et seulement si $(x-1)(x^2-3x-2)=0$,

donc si et seulement si $x-1=0$ ou $x^2-3x-2=0$

Résolvons la dernière équation $x^2-3x-2=0$.

$\Delta=(-3)^2-4(1)(-2)=17$ > 0

On a donc deux racines distinctes $x'=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x'=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Finalement l'ensemble des solutions est $S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};1;\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

2. Faire la division euclidienne de $2x^3+3x^2+x-6$ par *x-1*

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2x^3 & +3x^2 & +x-6 & x-1 \\
- & 2x^3 & -2x^2 & & \hline 2x^2+5x+6 \\
\hline
 & & 5x^2 & +x & \\
 & - & 5x^2 & -5x & \\
\hline
 & & & 6x-6 & \\
 & & - & 6x-6 & \\
\hline
 & & & \cdot &
\end{array}
$$

Ainsi

$2x^3+3x^2+x-6=(x-1)(2x^2+5x+6)$