Séquence 1 : Équations du second degré dans IR

1. Forme canonique d'un trinôme du second degré

1.1 Recherche de la forme canonique

Soit le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

En mettant a en facteur, on obtient : $f(x)=a[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}]$.

D'autre part, on sait que $(x+\frac{b}{2a})^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$ donc : $x^2+\frac{b}{a}x=(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}$.

D'où $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}]$

En mettant au même dénominateur, $f(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]$.

En posant $\alpha=\frac{b}{2a}$ et $\beta=-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})$, on a $f(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$.

Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

L'écriture $f(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$ est appelée **forme canonique** de f(x). La forme canonique permet de savoir si on peut factoriser ou non le trinôme.

1.2 Factorisation à partir de la forme canonique

- Si $\beta > 0$, on ne peut pas factoriser f(x) ;
- Si $\beta = 0$, $f(x)=a(x+\alpha)^2=a(x+\alpha)(x+\alpha)$;
- Si $\beta < 0$, $f(x)=a[(x+\alpha)^2-k^2]=a(x+\alpha-k)(x+\alpha+k)$ avec $k^2 = -\beta$.

2. Résolution de l'équation ax²+bx+c = 0

Pour résoudre $ax^2+ bx+ c = 0$:

1) Repérer les coefficients de x^2 (c'est a), de x (c'est b) et le coefficient constant (c'est c).

2) Regarder si on peut factoriser facilement le premier membre. Dans ce cas, mettre a en facteur et regarder l'autre facteur :

- $a[x^2+\frac{b}{a}x]=0$: il n'y a pas de terme constant et $ax(x+\frac{b}{a})=0$.

  Les solutions sont : 0 et $-\frac{b}{a}$.
- a (x²–h²) =0. On a une différence de deux carrés. a(x+h)(x–h) = 0. Ainsi, x +h = 0 ou x - h = 0.

  Les solutions sont : - h et h.
- a (x²+2kx+k²) = 0. C'est le développement d'un carré, l'équation s'écrit : a(x+k)² = 0.

  On a une racine double : - k.

3) Si on ne peut rien faire, calculer le discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Il y a trois cas à envisager :

$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
L'équation est impossible. On écrit : S = ø	Il y a une racine double : $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ S = { x'}	Il y a deux racines distinctes : $x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ S={x' ; x''}

Exemples :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

- $2x^2-8 = 0$

En factorisant, on a : $2x^2-8 = 2(x^2-4)$

$= 2(x-2)(x+2)$

Donc $2x^2-8 = 0$ si seulement si $2(x-2)(x+2) = 0$.
Finalement, $2x^2-8 = 0$ si et seulement si $x+2 = 0$ ou $x-2 = 0$.

S = {-2 ; 2 }.

- $3x^2+6x = 0$

En factorisant, on a : $3x^2+6x = 3x(x+2)$

Donc $3x^2+6x= 0$ si et seulement si $3x = 0$ ou $x -2. = 0$.
On a alors x = 0 ou x = -2.

S = {-2 ; 0 }.

- $x^2-5x+6 = 0$.

Ici, a = 1, b = -5 et c = 6 . $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(1)(6) = 1$.
$\Delta > 0$, on a deux solutions distinctes :

$\sqrt{\Delta}=1$, $x'=\frac{-(-5)-1}{2\times1}=2$ et $x''=\frac{-(-5)+1}{2\times1}=3$.

S = {2 ; 3}.