CALCUL DANS IR : Séquence 3

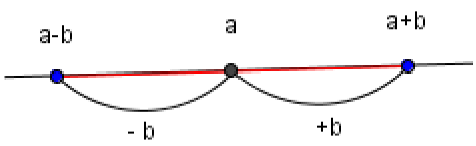
1. Résolution géométrique d'équations ou d' inéquations avec valeurs absolues

On traduit à l'aide de distance l'équation ou l'inéquation

1.1 Équation |x – a| = b

Il est évident que l'équation admet une solution pour b ≥ 0

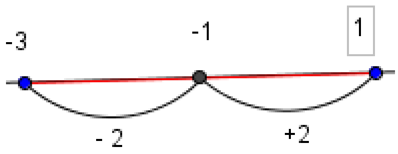
|x – a| = b si et seulement si, d(x ; a) = b



La solution est : *S* = { a - b ; a+b}

Exemple : Résoudre dans IR |x| = 3 ; |x-2| = 1 ; |x+1|= 2

on va prendre le troisième équation : |x+1|= 2 si d(x ; -1) = 2

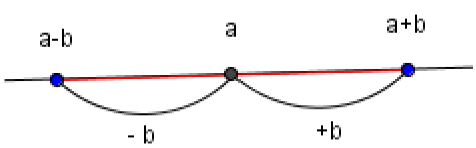


La solution est : *S* = { - 3 ; 1}.

1.2 Inéquations |x - a| < b ou |x - a| ≤ b

1.2.1 Inéquation |x - a| < b

|x – a| < b si et seulement si, d(x ; a) < b



La solution est : *S* =] a - b ; a+b [

1.2.2 Inéquation |x-a| ≤ b

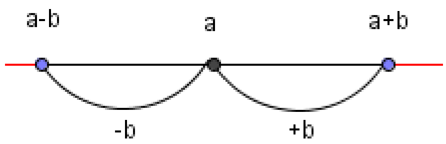
On applique la même démarche mais l'inégalité stricte devient large donc,

|x - a| ≤ b si x ϵ [a - b ; a+b]

1.3 Inéquations |x-a| > b ou |x-a| ≥ b

1.3.1 Inéquation |x-a| ≥ b

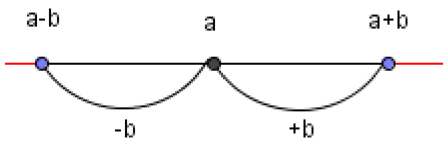
|x – a| ≥ b si et seulement si, d(x ; a) ≥ b



La solution est : *S* =] -∞ ; a - b] U [a+b ; +∞[

1.3.2 Inéquation |x-a| > b

|x – a| > b si et seulement si, d(x ; a) > b



La solution est : *S* =] - ∞ ; a - b [U] a+b ; +∞ [

2. Résolution algébrique d'équations ou d' inéquations avec valeurs absolues

2.1 Équation |x – a| = b

En appliquant la propriété |x| = a si et seulement si x = - a ou x = a, on a :

|x – a | = b si x – a = - b ou x - a = b, d'où *S* = { a-b ; a+b}

2.2 Inéquations |x-a| < b ou |x-a| ≤ b

2.2.1 Inéquation |x-a| < b

On utilise la propriété |x| < b si et seulement si - b < x < b , alors :

|x-a| < b si - b < x - a < b . En ajoutant a au trois membres de l'inégalité, on a a - b < x < a + b.

La solution est : *S* =] a - b ; a+b [

2.2.2 Inéquation |x-a| ≤ b

On utilise la propriété |x| ≤ b si et seulement si - b ≤ x ≤ b , alors :

|x-a| ≤ b si - b ≤ x - a ≤ b . En ajoutant a au trois membres de l'inégalité, on a a - b ≤ x ≤ a + b.

La solution est : *S* = [a - b ; a+b]

2.3 Inéquations |x-a| > b ou |x-a| ≥ b

2.3.1 Inéquation |x-a| > b

On a : |x-a| > b si x – a < - b ou x – a > b, si x < a - b ou x > a + b

Ainsi :

|x-a| > b si et seulement si x ϵ] - ∞ ; a-b [U] a+b ; +∞ [. ***S*** =] - ∞ ; a - b [U] a+b ; +∞ [

2.3.2 Inéquation |x-a| ≥ b

On a : |x-a| ≥ b si x – a ≤ - b ou x – a ≥ b, si x ≤ a - b ou x ≥ a + b

Ainsi :

|x-a| ≥ b si et seulement si x ϵ] - ∞ ; a-b] U [a+b ; +∞ [. ***S*** =] - ∞ ; a - b] U [a+b ; +∞ [

3. Problème réciproque

On peut traduire en inéquation avec valeur absolue des intervalles.

Exemple :

Traduire à l'aide d'inéquation avec valeur absolue x ϵ] 1; 5 [.

on a : |x-a| < b si x ϵ] a - b ; a+b [donc , x ϵ] 1 ; 5 [si a – b = 1 et a + b = 5 . Ce qui donne les valeurs a = 3 et b = 2. L'inéquation cherchée est |x – 3| < 2.