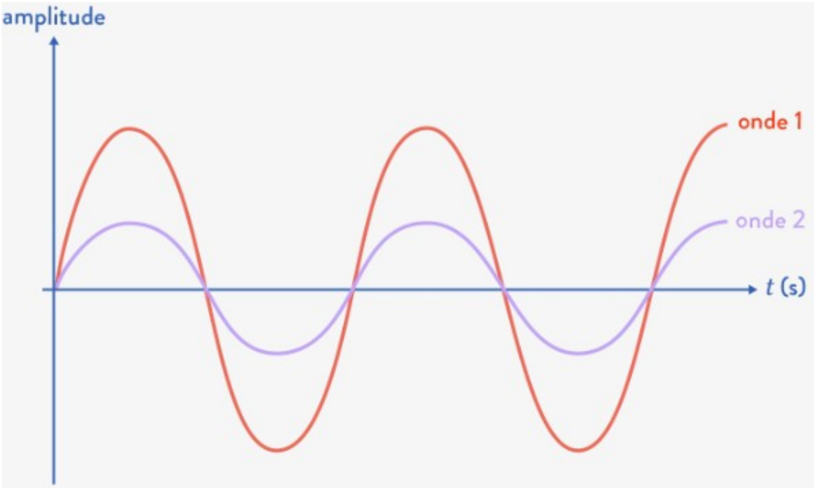
Mise en équation du phénomène d'interférence

1. Rappels

1.1 Déphasage entre deux ondes

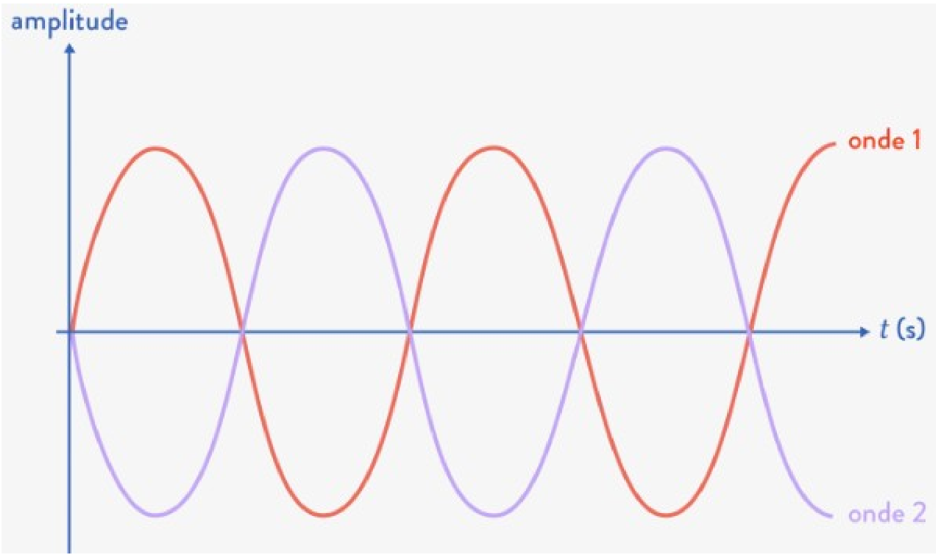
Il existe deux cas particuliers du déphasage constant qui nous intéressent particulièrement.

- le déphasage nul , c'est – à – dire que les deux ondes sont en phases.



Dans ce cas , à un instant t, l'onde 1 est à son maximum et l'onde 2 le sera aussi. Les deux ondes sont en phase lorsque les deux points des deux ondes à un instant t ont le même état vibratoire.

- le déphasage est égal à π c'est-à-dire que les ondes sont en opposition de phase.



2. Superposition de deux signaux de même fréquence

Afin d'appréhender le phénomène d'interférence, considérons le cas simple de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence f , donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$. Néanmoins, considérons que ces deux signaux aient des phases à l'origine φ différentes

2.1 Signaux de même amplitude

Commençons l'étude avec des signaux de même amplitude.

$$s_1(x,t) = A_0\sin(\omega t - kx + \varphi_1)$$

$$s_2(x,t) = A_0\sin(\omega t - kx + \varphi_2)$$

Placons-nous à x = 0. La somme des deux signaux en ce point est :

$$s_{tot}(t) = s_1(t)+s_2(t)$$

$$s_{tot}(t) = A\sin(\omega t + \varphi_1) + A_0\sin(\omega t + \varphi_2) = A_0[\sin(\omega t + \varphi_1) + \sin(\omega t + \varphi_2)$$

on pose $p = \omega t + \varphi_1$ et $q = \omega t + \varphi_2$

$$s_{tot}(t) = A_0(\sin p + \sin q) = 2A_0\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$s_{tot}(t) = 2A_0\cos\left(\frac{\omega t+\varphi_1-\omega t-\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega t+\varphi_1+\omega t+\varphi_2}{2}\right) = s_{tot}(t)=2A_0\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

$$s_{tot}(t)=2A_0\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$

Le premier cosinus ne depend pas du temps, il ne depend que des phases a l'origine des deux ondes. L'amplitude de la somme des signaux n'est pas forcement égale a la somme des amplitudes des signaux.

L'expression de la somme des signaux devient : $s_{tot}(t)=A\sin\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$ (1)

avec $A=2A_0\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$ (2)

Finalement, en etudiant l'argument du cosinus dependant du temps, on constate que la somme des signaux oscille avec la meme pulsation ω que les signaux s_1 et s_2.

2.2 Signaux de différents amplitudes

Cette fois considerons deux signaux tels que :

$$s_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Decomposons les cosinus de chacun des signaux a l'aide de la formule trigonometrique :

$$s_1(t) = A_1(\sin\omega t\cos\varphi_1 + \cos\omega t\sin\varphi_1)$$

$$s_2(t) = A_2(\sin\omega t\cos\varphi_2 + \cos\omega t\sin\varphi_2)$$

La somme des ces amplitudes est ainsi :

$$s_{tot}(t) = s_1(t)+s_2(t)$$

$$s_{tot}(t) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\sin\omega t + (A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\cos\omega t$$

Afin d'exprimer la somme des signaux de maniere plus compacte, on peut toujours changer la forme des termes ne dependant pas du temps, tels que :

$$A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\psi$$

$$A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\psi$$

$$s_{tot}(t) = A\cos\psi\sin\omega t + A\sin\psi\cos\omega t = A(\cos\psi\sin\omega t + \sin\psi\cos\omega t)$$

On reconnait une formule trigonometrique, et on peut alors écrire:

$$\mathbf{s_{tot}(t) = A\sin(\omega t + \psi)} \qquad (3)$$

On voit que la somme de deux signaux d'amplitudes differentes, mais de pulsation egale, oscille a la meme pulsation.

Déterminons A :

$$(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 = A^2\cos^2\psi$$

$$(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2 = A^2\sin^2\psi$$

On fait la somme des deux termes:

$$(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2 = A^2\cos^2\psi + A^2\sin^2\psi$$

Développons:

$$A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + A_1^2\sin^2\varphi_1 + A_2^2\sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = A^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi)$$

sachant que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, il vient que $A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = A^2$

et en en utilisant la relation trigonometrique cos(a−b) = cosacosb+sinasinb

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = A^2$$

soit $$\mathbf{A = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2))}} \quad (4)$$

La formule des interférences nous donne l'amplitude A du signal résultant de la superposition de deux signaux de même fréquence d'amplitude A_1 et A_2 et de phase φ_1 et φ_2

<u>NB</u> : si on prend $A_1 = A_2 = A_0$ l'amplitude devient : $A = \sqrt{2A_0^2 + 2A_0^2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ ou

$A = A_0\sqrt{2(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}$ or $1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos^2\left(\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}\right)$ donc on a :

$A = A_0\sqrt{4\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}$ d'où $A = 2A_0\cos\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$ on retrouve la relation (2) ci-dessus.

3. Influence du déphasage

La différence de phase appelée déphasage des signaux est notée **Δφ**.

Le déphasage entre le signal s_1 et le signal s_2 est de manière générale égale à :

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_1 + \varphi_1) - (\omega t + kx_2 + \varphi_2)$$

et pour $x_1 = x_2$

$$\mathbf{\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2}$$

Le déphasage entre le signal s_2 et le signal s_1 est de manière générale égale à :

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_2 + \varphi_2) - (\omega t + kx_1 + \varphi_1)$$

et pour $x_1 = x_2$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

D'après la formule des interférences, l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux signaux de même fréquence d'amplitude A_1 et A_2 et de déphasage $\Delta\varphi$ est :

$$A = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi)}$$

3.1 Propriété 1

L'amplitude résultante **A** est **maximale** lorsque : $\cos\Delta\varphi = 1$ donc $\Delta\varphi = 2m\pi$; m nombre entier relatif $m \in \mathbb{Z}$ Dans ce cas:

$$A_{max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$$

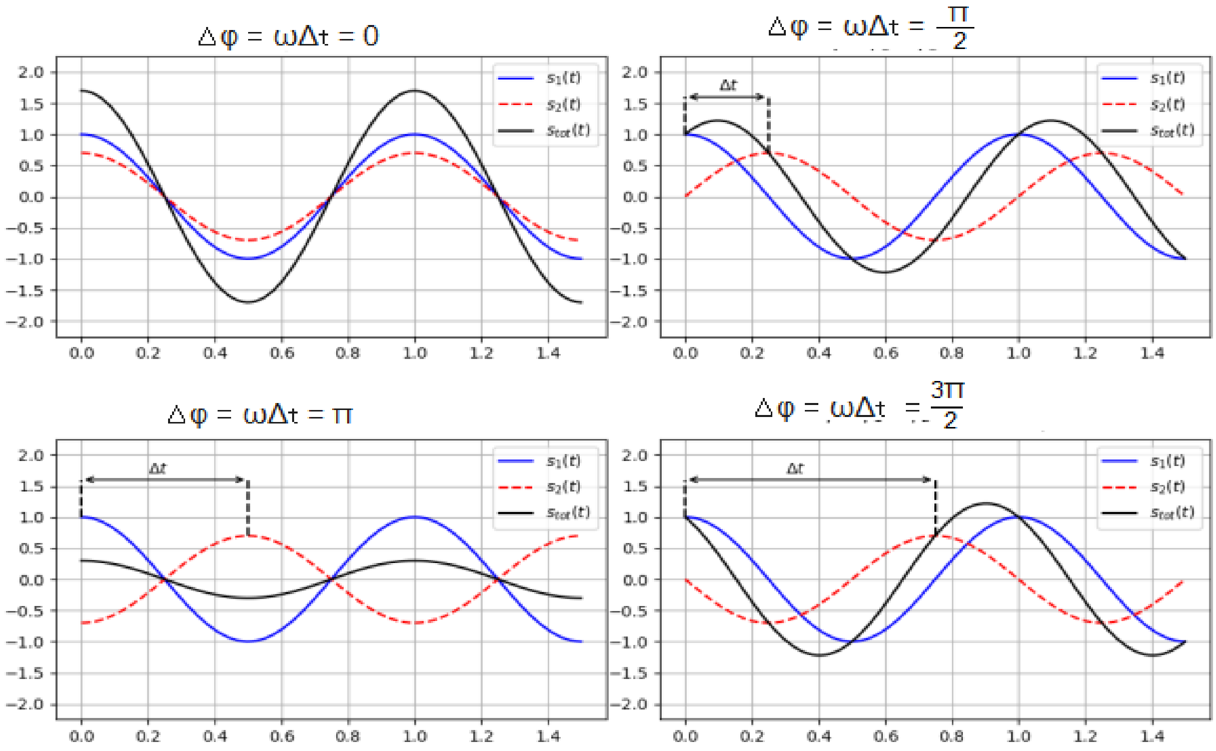
3.2 Propriété 2

L'amplitude résultante A est minimale lorsque : $\cos\Delta\varphi = -1$ donc $\Delta\varphi = 2(m+1)\pi$

Dans ce cas: $$A_{min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = |A_1 - A_2|$$

3.3 Évolution temporelle des deux signaux et leur déphasage

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Ce déphasage est lié au retard du signal $s_2(t)$ par rapport au signal $s_1(t)$ qu'on peut noter Δt tel que : $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$



superposition de deux signaux s1(t) et s2(t) pour différentes valeurs du déphasage Δφ