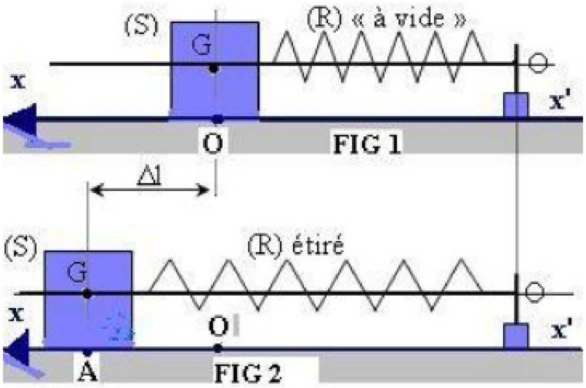
Exercices sur l'énergie potentielle élastique

Exercice 1

On considère le système {solide ressort} de la figure ci-dessous.



La masse de l'objet et m=500g et la raideur du ressort: $k=15N.m^{-1}$; les frottements sont négligés.

1-Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique Ep du système en fonction de x.

2-Tracer la courbe Ep=f(x). pour $-0.25m < x < +0,25m$

3-Initialement à vide, la masse est écartée de $\Delta l = 0,2m$ et abandonnée sans vitesse initiale.

Donner la valeur de l'énergie mécanique E_{m1} et préciser graphiquement les limites d'évolution du système.

Calculer la vitesse maximum v_{max1} de l'objet.

4- L'objet est écarté cette fois de $\Delta l = 0,2m$ avec une vitesse $v_0 = 0,5m.s^{-1}$.

Calculer l'énergie mécanique E_{m2}du système.

Préciser l'amplitude des oscillations et la valeur v_{max2} de la vitesse maximum.

On utilisera une méthode graphique complétée par le calcul.

Exercice 2

1. Définir les notions suivantes :

Oscillateur mécanique - mouvement oscillatoire - oscillation libre - amplitude de mouvement - élongation du mouvement - période propre - amortissement des oscillations mécaniques - oscillations forcées - oscillations entretenues - pendule élastique - pendule pesant - pendule simple - pendule de torsion .

2. Choisir la bonne réponse :

(a) Plus la raideur d'un ressort est grande , plus la période du pendule élastique horizontal est :

(a) grande (b) petite

(b) La formule de la période des oscillations du pendule élastique horizontal n'est valable que pour des petites élongations :

(a) vrai (b) faux

(c) En présence de frottements , l'amplitude d'un pendule de torsion :

(a) croit (b) décroît (c) reste constante

(d) Plus la longueur du fil d'un pendule simple est grande , plus sa période est :

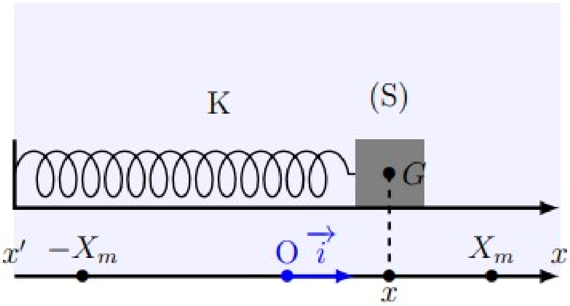
(a) courte (b) longue

(e) Plus la constante de torsion est grande , plus la période du pendule de torsion est

(a) grande (b) petite

Exercice 3: résolution analytique de E.D

Un oscillateur mécanique élastique est constitué d'un ressort de constante de raideur K = 10N/m associé à un solide de masse m = 250g. On écarte le système de sa position d'équilibre de 2cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.



On considère un axe (O, $\vec{i}$), avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre et le vecteur unitaire $\vec{i}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation OG = x(t).

1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante : $\ddot{x}+\frac{K}{m}.x=0$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme : x(t) = $X_m$cos ($\left(\frac{2\pi}{T_0 t+\varphi}\right)$)

(a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

(b) Déterminer les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif .Écrire cette solution.

(c) Déterminer la vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions .

(d) Déterminer les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable;

* lorsque x = X_m et x = $-X_m$

Solution: exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :

Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;

Système étudié : le solide (S) ;

Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$, la réaction du plan horizontal $\vec{R}$ et la tension du ressort $\vec{F}$ = −K. $\overrightarrow{\Delta l}$

On applique la deuxième loi de Newton sur (S) :

$\vec{P}$ + $\vec{R}$ + $\vec{F}$.= m.$\vec{a}_G$

On projette la relation sur x 'Ox :

0 + 0 − K.Δl = m. $\frac{d^2x}{dt^2}$

d'où $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{K}{m}.x=0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t)=X_m\cos(\frac{2\pi}{T_0 t+\varphi})$$

2.1 L'expression de la période propre T0 des oscillations du pendule élastique : x(t) solution de l'équation différentielle , donc elle la vérifie , i.e on dérive deux fois x(t) par rapport au temps :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t+\varphi}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T_0^2}x(t)$$

Pour que x(t) soit solution de l'E.D il suffit que

$$\frac{K}{m} = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Application numérique : $T_0 \approx 1$s

2.2 On détermine les paramètres X_m et φ , sachant qu' à l'instant t=0 , G passe par la position d'équilibre du pendule dans le sens positif :

D'après les données de l'exercice on $X_m = 2.10^{-2}$m

En considérant les conditions initiales suivantes : à t = 0, on a x(0) = 0 passe par la position d'équilibre et v(0) > 0 ;

$X_m\cos\varphi = 0$ donc $\varphi = \pm\ \frac{\pi}{2}$

et puisque la vitesse à t=0 est positive : $-X_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\varphi) > 0$ c'est à dire que $\sin\varphi < 0$,

d'où $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

donc la solution de E.D est :

$x(t) = 2 \times 10^{-2} \cos(2.\pi.t - \pi/2)$

2.3 La vitesse des oscillation à l'instant t , en déduire la vitesse maximale du système en précisant sa positions :

La vitesse des oscillations : $v(t) = -4 \times 10^{-2}\pi \sin(2.\pi.t - \pi/2)$

Cette vitesse est maximale lorsque $\sin(2.\pi.t - \pi/2) = -1$ i.e que $v_{max} = 4 \times 10^{-2}\pi$

2.4 Les caractéristiques de la force $\vec{F}$ exercée par le ressort sur le solide dans les deux cas suivant :
L'intensité de la force : Est une force de rappel qui s'oppose au sens d'allongement $F(t) = K.x(t)$

* lorsque le solide passe par sa position d'équilibre stable ; nous avons $x(t) = 0$ donc $F t) = 0$

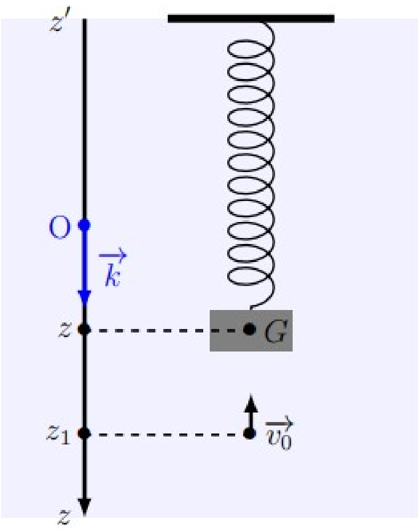
* lorsque $x = X_m$ et $x = -X_m$ Pour $x = X_m$ nous avons $\vec{F} = K.X_m \vec{i}$ l'intensité de la force est maximale et dans le même sens que $\vec{i}$

Pour $x = -X_m$ nous avons $\vec{F} = -K.X_m \vec{i}$ l'intensité est maximale et dans le sens opposé de $\vec{i}$.

<u>Exercice 4 :</u> Pendule élastique vertical

Un pendule élastique vertical est constitué d'un ressort de constante de raideur K = 10N/m associé à un solide de masse m = 300g. On écarte le système de sa position d'équilibre de z_1 = 2cm et à l'instant t=0 (origine des dates) on l'abandonne avec une vitesse initiale v_0 = 0.3m/s dans le sens négatif de l'axe (O, $\vec{k}$) orienté vers le bas et avec O coïncide avec la position du centre d'inertie G du solide à l'équilibre stable et le vecteur unitaire $\vec{k}$ parallèle au déplacement du solide.

On repère la position G du solide à chaque instant par l'élongation OG = z(t).



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie G du solide obéit, en absence de frottement , à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z}+\frac{K}{m}.z=0$$

2. La solution de cette équation différentielle est de la forme : $x(t) = Z_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0 t+\varphi}\right)$

(a) Déterminer l'expression de la période propre T_0 des oscillations du pendule élastique et calculer sa valeur .

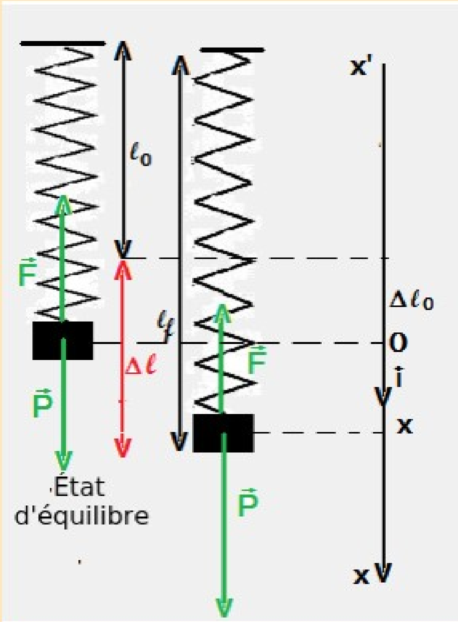
(b) Déterminer les paramètres Z_m et φ .

3. Étudions le cas où on lance le système à t=0 , à partir de l'état d'équilibre stable , dans le sens positif avec une vitesse $v_0 = 0, 3m/s$. Déterminer les paramètres Z_m et φ.

Solution : exercice 4

Solution : exercice 3

1. Établissement de l'équation différentielle du mouvement :
Référentiel lié au laboratoire considéré comme Galiléen ;
Système étudié : le solide (S) ;
Bilan des forces exercées sur le système : le poids $\vec{P}$ et la tension du ressort $\vec{F} = -K.\vec{\Delta l}$;
Étude du système à l'état d'équilibre :



$$\vec{P}+\vec{F} = -K.\vec{\Delta l_0} = \vec{0}$$

On projette sur $z'Oz$, on aura :

$$m.g - K.\Delta l_0 = 0 \qquad (1)$$

À l'instant t on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P}+\vec{F} = m.\vec{a_z}$$

$$mg - K.\Delta l = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$ Donc :

$$mg - K.\Delta l_0 - K.z = m.\frac{d^2z}{dt^2}$$

et d'après l'état d'équilibre on a $m.g - K.\Delta l_0 = 0$, I.e que E.D sera :

$$-K.x = m.\frac{d^2z}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{K}{m}.z = 0}$$