# Calcul matriciel

## 1. Définitions

### 1.1 Matrice (n,p)

Une matrice est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. On dit que la matrice est de taille n x p ou (n,p).

Si n = p, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice (3,2)
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{7} & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice (2,3)

Une matrice carrée est donc une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.
Pour simplifier, nous dirons qu'une matrice carrée ayant n lignes et n colonnes est une matrice de taille n

**Exemples** : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{7} & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -14 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées.

Dans ce chapitre, on n'étudiera que les matrices carrées.

### 1.2 Matrices carrées particulières

#### 1.2.2 Matrices nulles

Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments la constituant sont nuls.

Exemples

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices nulles

#### 1.2.2 Matrices diagonales

Une matrice diagonale est une matrice dont les éléments autres que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales

### 1.2.3 Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice dont les éléments situés en-dessous de la diagonale sont tous nuls que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires supérieures.

Une matrice triangulaire inférieures est une matrice dont les éléments situés en-dessous de la diagonale sont tous nuls que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

A= $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -8 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ sont des matrices triangulaires inférieures

### 1.2.3 Matrice identité

On appelle matrice identité de taille n et on note $I_n$ la matrice diagonale, dont tous les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Exemples

A= $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et B $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices identités

# 2. Opérations sur les matrices

## 2.1 Addition de deux matrices

On ne peut addition deux matrices que si elles sont de même taille.

L’addition s’effectue élément par élément.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

La somme de deux matrices est une matrice de même taille.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

**Propriété**

L’addition de deux matrices est commutative, ce qui signifie que si A et B sont deux matrices de même taille, alors A+B = B+A.

De même, l’addition des matrices est associative : si A, B et C sont des matrices de même taille, alors (A+B)+C = A+(B+C) =A+B+C.

## 2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Le produit d'une matrice par un nombre k est une matrice de même taille.

Elle s'obtient en multipliant chaque élément par k.

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} \\ k.a_{21} & k.a_{22} \end{pmatrix}$$

$$k.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & k\,a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

**Propriété**

Pour toute matrice M et pour tous réels k et k', (k.k').M =k.(k'.M)

## 2.3 Produit de deux matrices

Le produit de deux matrices A et B est une matrice C de même taille que A et B.

L'élément $c_{ij}$ de la matrice C est le « produit scalaire » de la ligne i de A et de la colonne j de B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \;,\; c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \quad \text{et} \quad c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$$

*Disposition pratique*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} \\ & \| \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_{11} \\ c_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}$$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \quad \dots \quad c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}$$

L'élément $c_{ij}$ est le « produit scalaire » de la ligne i de A et de la colonne j de B

*Disposition pratique*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{matrix} \end{pmatrix} \\ & \| \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \boxed{c_{12}} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le produit de deux matrices n'est pas commutatif : Si A et B sont deux matrices de même taille, A.B et B.A ne sont pas nécessairement égales.

La multiplication de deux matrices associative : Ax(BxC) = (AxB)xC

La multiplication de deux matrices est distributive par rapport à l'addition Ax(B+C) = (AxB)+(AxC)

Si M est une matrice carrée de taille n, alors $M.I_n = I_{n.}M = M$ : on dit la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication de matrice.

Une matrice M est dite idempotente si son carré est égale à elle-même : $M^2 = M.M = M$ . Dans ce cas , $M^n = M$ quel que soit l'entier naturel n.

Une matrice M est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ ( $M^p$ est la matrice nulle)

## 2.4 Puissance d'une matrice carrée

Pour une matrice carrée M, on définit le carré de M par $M^2 = M.M$ .

De la même manière on définit le cube de la matrice et plus généralement la puissance $n^{ième}$ de M par

$M^3 = M.M.M$ et $M^n = MM....M$

## 2.5 Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice M, notée ${}^tM$ , est la matrice de même taille que M et dont les éléments de la $i^e$ colonne sont les éléments de la $i^e$ ligne de M, et les éléments de la $j^e$ ligne sont les éléments de la $j^e$ colonne de M.

**Exemple**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 7 & \sqrt{3} \\ 5 & \frac{1}{3} & -4 \end{pmatrix}$ . Sa transposée est ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & \frac{1}{3} \\ -1 & \sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}$

**Propriété**

La transposée d'une matrice diagonale est égale à elle-même.

# 3. Déterminant d'une matrice

Considérons une matrice carrée 2 x 2 :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M, noté det M est le nombre défini par $\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

**Exemples**

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - (-1)2 = 3 + 2 = 5$$ .

Pour une matrice 3x3

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{dét } M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{dét } M=2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2(3.4-1.5)+2((-1)4-1.1)+0=14-10=4$$

## 4. Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux. On note Tr(A)

Exemple

Soit $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Tr(A)= 2+3+4= 9

## 5. Inverse d'une matrice

Une matrice carrée M d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carrée N de même taille telle que $M.N=N.M=I_n$ .

N est appelée matrice inverse de M.

Si une matrice n'est pas inversible, on dit qu'elle est singulière.

**Exemple**

Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a $M.N=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.3+1(-2) & 1(-1)+1.1 \\ 2.3+3(-2) & 2(-1)+3.1 \end{pmatrix}$

$$M.N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M est donc inversible et son inverse est N.

**Propriétés**

Si M est inversible, son inverse est unique, et se note $M^{-1}$ .

$M^{-1}$ est aussi inversible et son inverse est M.

Si deux matrices de même taille A et B sont inversibles, alors le produit A.B est aussi inversible et l'inverse de A.B est la matrice $B^{-1}.A^{-1}$ .