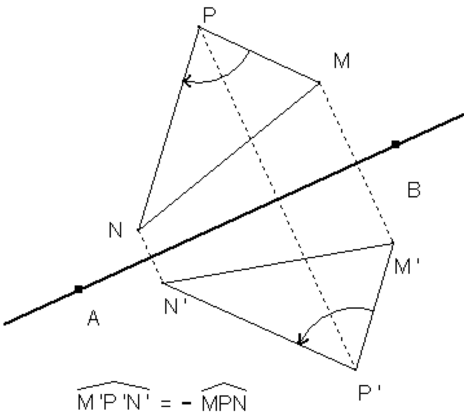
Isometries planes - antidéplacement

1. Définition – théorèmes

Un antidéplacement est une isométrie qui change un angle orienté en son opposé.



Soit f un antidéplacement du plan.
1. Si f fixe un point, ce ne peut être qu'une réflexion
2. Si f ne fixe aucun point, alors f = t o g avec g fixant un point.
g = t^{-1} o f est un antidéplacement fixant un point. C'est donc une réflexion s.
Alors : f = t o s

Théorème

Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les composées t o s où t est une translation et s une réflexion.

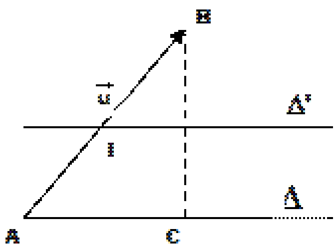
Définition

Une symétrie glissée est la composition d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une réflexion d'axe Δ dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur. On note $s_{\Delta,\vec{u}}$.

Théorème

La composée d'une translation et d'une réflexion est une réflexion ou une symétrie glissée

Démonstration.



Soit $f = t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$. Soit $A \in \Delta$; B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; soit C la projection orthogonale de B sur Δ

et soit Δ' la parallèle à Δ passant par le milieu I de [AB].

$$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{u}} = t_{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}} = t_{\overrightarrow{AC}} o\, t_{\overrightarrow{CB}} \\ t_{\overrightarrow{CB}} = s_{\Delta'} o\, s_{\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow f = (t_{\overrightarrow{AC}} o\, s_{\Delta'} o\, s_{\Delta}) o\, s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{AC}} o\, s_{\Delta'}$$

1. $\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow f = s_{\Delta'}$

2. $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AC}} o\, s_{\Delta'}$ avec $\overrightarrow{AC}$ directeur de (Δ'). Donc f est la symétrie glissée $s_{\Delta', \overrightarrow{AC}}$

Théorème

$s_{\Delta, \vec{u}} = t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} = s_{\Delta} o\, t_{\vec{u}}$

Démonstration. $t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} o\, t_{-\vec{u}}$ est un antidéplacement.

Si $M \in \Delta$ posons $M_1 = t_{-\vec{u}}(M)$. On a donc $\overrightarrow{MM_1} = -\vec{u}$

$\vec{u}$ étant directeur de (Δ) : $M_1 \in \Delta$

D'où $t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} o\, t_{-\vec{u}}(M) = t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta}(M_1) = t_{\vec{u}}(M_1) = M$ car $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$.

$t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} o\, t_{-\vec{u}}$ est donc un antidéplacement fixant tout point de (Δ).

Donc $t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} o\, t_{-\vec{u}} = s_{\Delta}$ d'où $t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} = s_{\Delta} o\, t_{\vec{u}}$

Remarques

Si f est une réflexion : f o f = Id

Si f est la symétrie glissée $s_{\Delta, \vec{u}}$: $f o f = t_{2\vec{u}}$

De plus, $f = t_{\vec{u}} o\, s_{\Delta} \Rightarrow s_{\Delta} = t_{-\vec{u}} o\, f$ permet de déterminer s_{Δ}.

Théorème

Les antidéplacements du plan sont les réflexions et les symétries glissées.

2. Composée

La composée de deux antidéplacements est un déplacement.

La composée d'un antidéplacement et d'un déplacement est un antidéplacement.

3. Expression analytique

f est un antidéplacement qui transforme M(x,y) en M'(x',y'). L'expression analytique de f est de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$