Dénombrement

1. Les nouveaux nombres

1.1 La factorielle d'un nombre

Pour tout entier naturel n, on définit et on note la factorielle d'un nombre n par :

0! =1 et pour n>0 n! =n.(n-1).(n-2)….3.2.1.

Ainsi : 1! =1, 2!=2, 4!=4x3x2x1= 24, 8!=8x7x6x5x4x3x2x1=40320.

1.2 Le nombre A_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

- $A_n^p=0$ si p > n
- $A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$ si p ≤ n.

Exemple

$$A_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!}=720$$

1.3 Le nombre C_n^p

Pour deux entiers naturels n, et p on a :

- $C_n^p=0$ si p > n
- $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$ si p ≤ n.

Exemple

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=120$$

2. Dénombrement

2.1 Cardinal d'un ensemble fini

Le cardinal d'un ensemble fini E, noté Card E, est le nombre de ses éléments.

Exemple

Si E = {1, 2, 6, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, Card E = 10 .

2.2 Arrangement avec répétition

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E. Ici p désigne un entier naturel.

Dans un arrangement, on doit respecter l'ordre, mais un élément quelconque de E peut revenir autant de fois que l'on veut dans une suite.

Si Card E = n. le nombre d'arrangement d'élément de E est : N = n^p .

2.3 Arrangement sans répétition

Un arrangement sans répétition de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts. Ici p désigne un entier naturel.

Dans ce genre d'arrangement, on doit aussi respecter l'ordre, et éviter de faire revenir une deuxième fois un élément déjà choisi.

Dans le cas où n=p, on parle de permutation.

- Si Card E =n, le nombre d'arrangement sans répétition d'éléments de E est :

$$N = A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Le nombre de permutation de n éléments est $P_n = n!$

2.4 Combinaison

Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de E à p éléments.

Dans une combinaison, il n'y a plus d'ordre .

Si Card E = n , le nombre de combinaison de p éléments de E est :

$$N = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2.5 Règle du produit

Si on peut choisir un objet A de α façons, et un objet B de β façons, alors on peut choisir A puis B de α . β façons.

2.6 Méthode

Résumons dans un tableau l'utilisation de ces formules.

Modélisation	Les p élément sont ordonnés	Les p éléments sont distincts	Outils	Nombre de tirage
Tirages successifs avec remise	OUI	NON	p-uplets	n^p
Tirages successifs sans remise	OUI	OUI	Arrangement sans répétition	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirages simultanés	NON	OUI	Combinaison	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2.7 Exercices résolus

Exercice 1 :

5 boules rouges et 3 boules vertes, indiscernables aux toucher, sont placées dans une urne. On tire au hasard, successivement et avec remise boules de l'urne.

1) Quel est le nombre de tirage possible

2) Quel est le nombre de tirage de 2 boules de même couleur .

3) Quel est le nombre de tirage d 2 boules de couleur différente.

Réponse :

1) Soit E l'ensemble des boules.

Tirer successivement et avec remise 2 boules c'est prendre un 2-uplet d'éléments de E.

Le nombre de tirage possible est N = $n^p = 8^2 = 64$.

2) Le nombre de tirage de deux boules de même couleur :

On aura 2 rouges ou de vertes . N = $5^2 + 3^2 = 34$.

3) Le nombre de tirage de deux boules de couleur différentes :

Une rouge et une verte ou une verte et une rouge. N = 5•3 + 3•5 = 30

Exercice 2

Un sac contient 9 jetons indiscernable au toucher et portant les numéros 1 2, 3,…, 9.

1) 0n tire successivement trois jetons du sac, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac. 0n écrit côte à côte chacun des trois chiffres tirés dans l'ordre du tirage. 0n obtient ainsi un nombre à trois chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

2) 0n tire successivement sans remise trois jetons du sac. 0n place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former ainsi de nombre de 3 chiffres ?

3) 0n procède au tirage de trois jetons simultanément. Quel est le nombre de tirage possible ?

Réponse

1) Exemples de résultats : 232, 551, 333,124, … C'est un arrangement avec répétition, leur nombre est donc : 9^3 =729 cas posiibles.

2) Exemples de résultats : 145, 541,415, 321, ... C'est un arrangement sans répétition, leur nombre est donc : $A_9^3=\frac{9!}{(9-3)!}$ = 504 cas possibles.

3) Il s'agit de combinaison. Il y a donc $C_9^3=\frac{9!}{3!(9-3)!}$ = 84 cas possibles.