Fonctions rationnelles : exercices

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) Etudier les variations de f

2.°) a) Montrer que pour tout $x\neq 1$ $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$

b) Montrer que (C) est l'image de l'hyperbole $(H): y=\dfrac{1}{x}$ par une translation à déterminer

3.°) a) Préciser $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

b) Comment se comporte la courbe (C) par rapport à la droite $(Ah): y=1$?

4°) a) Préciser $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Comment se comporte la courbe (C) par rapport à la droite $(Av): x=1$?

5°) Tracer (C), (Ah) et (Av) dans le même repère $R(O,i,j)$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants :

1°) Etudier les variations de f

2°) Préciser les point(s) extremum et les point(s) d'inflexion éventuel(s)

3.°) Préciser si elle(s) existent le(s) asymptote(s) verticale(s) et/ou horizontale(s)

3°) Représenter graphiquement f

$f(x)=\dfrac{4-x}{x-2}$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+1}$

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

$f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+2}$

$f(x)=2\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=4\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Identifier les points maximum et minimum de (C)

2°) a) Trouver tous les points d'inflexion de (C)

b) Donner l'équation de chacune des tangentes à (C) en ces points

c) Montrer que l'un de ces points est un centre de symétrie pour (C)

3°) Faire l'étude des branches infinies de (C)

4°) Représenter dans $R(O,i,j)$, (C) avec tous les points et droites demandées

Exercice 4

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{3x^2-6x}{x^2-2x+4}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Identifier M, point minimum de (C)

2°) a) Trouver I_1 et I_2, points d'intersection de (C) avec l'axe $(x'Ox)$

b) Montrer que ces points sont des points d'inflexion pour (C)

c) Donner l'équation de chacune des droites (T_1) et (T_2), tangentes à (C) respectivement en I_1 et I_2

3°) a) Trouver J_1 et J_2, points d'intersection de (C) avec la droite $(D): y=2$

b) Donner l'équation de chacune des droites (Δ_1) et (Δ_2), tangentes à (C) respectivement en J_1 et J_2

4°) Montrer que la droite $(\Delta)x=1$ est un axe de symétrie pour (C)

5°) Préciser toutes les asymptotes de (C)

6°) Représenter dans $R(O,i,j)$, (C) avec tous les points et droites demandées.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) Etudier les variations de f

2°) a) Trouver I, point d'intersection de (C) avec l'axe $(x'Ox): y=0$

b) Montrer que I est un point d'inflexion pour (C)

c) Donner l'équation de (T), tangente à (C) en I

3°) a) Trouver J et K, points où (C) admet des tangentes parallèles à (T)

b) Donner l'équation de chacune des droites (T_1) et (T_2), tangentes à (C) respectivement en J et K

4°) a) Trouver les deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 0$ et $x \neq 2$, $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-2}$

b) Montrer que I est un centre de symétrie pour (C)

5°) Faire l'étude des branches infinies de (C)

6°) Représenter dans $R(O,i,j)$, (C) avec tous les points et droites demandées.

Exercice 6

On définit la fonction f par $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i\,,j)$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Identifier les point(s) maximum et/ou minimum de (C)

2°) a) Calculer les limites suivantes : $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $B=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-A\cdot x\right)$

b) Trouver les trois réels a, b et c tels que pour tout $x\neq -1$ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

3°) a) Résoudre l'équation $f(x)-(ax+b)=0$

b) Que dire de la courbe (C) par rapport à la droite $(D): y=ax+b$?

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)$

b) Comment se comporte la courbe (C) par rapport à la droite $(D): y=ax+b$?

5°) Etudier les positions de (C) par rapport à la droite (D)

6°) Vérifier que (C) admet une asymptote verticale à déterminer

7°) Tracer dans le même repère $R(O,i\,,j)$ la courbe (C) et la droite (D)

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{-x^2+x-1}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i\,,j)$

1°) Etudier les variations de f

2°) a) Calculer $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $B=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-A\cdot x\right)$

b) Trouver les trois réels a, b et c tels que pour tout $x\neq 1$ $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

3°) a) Montrer que la droite $(D): y=ax+b$ est une asymptote oblique à (C)

b) Montrer que (C) admet une asymptote verticale à déterminer

4°) a) Trouver I, point d'intersection des asymptotes de (C)

b) Montrer que I est un centre de symétrie pour (C)

5°) Représenter graphiquement f avec tous les points et droites demandées.

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i\,,j)$

1°) Etudier les variations de f

2°) a) Trouver I et J, points où (C) admet des tangentes parallèles à la droite $(D): y=2x-3$

b) Donner alors l'équation de ces tangentes, qu'on notera (T_1) et (T_2)

3°) a) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$; a, b et $c\in IR$

b) Faire l'étude des branches infinies de f

c) Etudier les positions de (C) par rapport à la droite $(A_O): y = ax + b$

4°) a) Trouver K, point d'intersection de (D) et (A_O)

b) Montrer que K est un centre de symétrie pour (C)

5°) Représenter graphiquement f avec tous les points et droites demandées

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 + 4}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, i, j)$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Que dire du point d'intersection de (C) avec l'axe $(y'Oy): x = 0$?

2°) a) Calculer $A = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $B = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - A \cdot x\right)$

b) Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{cx}{x^2 + 4}$; a, b et $c \in IR$

c) Etudier les positions de (C) par rapport à la droite $(D): y = ax + b$

3°) a) Trouver I et J, points où (C) admet des tangentes parallèles à (D)

b) Donner l'équation de chacune des tangentes à (C) en ces points

c) Montrer que le milieu du segment $[IJ]$ est un centre de symétrie pour (C)

4°) Représenter graphiquement f avec tous les points et droites demandées.

Exercice 10

Faire l'étude et la représentation graphique de chacune des fonctions définies par les expressions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{2(x-1)}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2(2-x)}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{4x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$

Exercice 11

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x(x-2)}{x-1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O, i, j)$

1°) Etudier les variations de f

2°) a) Donner l'équation de (T), tangente à (C) à l'origine O du repère

b) En quel point A, (C) admet-elle une tangente parallèle à (T). Donner l'équation de cette tangente qu'on notera (T_A)

3°) Montrer que le milieu du segment $[OA]$ est un centre de symétrie pour (C)

4°) Faire l'étude des branches infinies de f

5°) Représenter graphiquement f avec tous les points et droites demandées.

Exercice 12

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-2}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) Trouver $I(x_I;y_I)$, point où la tangente (T_I) à la courbe (C) passe par l'origine O du repère. Donner alors l'équation de (T_I)

2°) Trouver $J(x_J;y_J)$, point où la tangente (T_J) à la courbe (C) est parallèle à (T_I)

3°) Faire l'étude et la représentation graphique de f tout en précisant (T_I) et (T_J)

Exercice 13

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$

On note (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R(O,i,j)$

1°) a) Etudier les variations de f

b) Identifier N et M, points minimum et maximum de f

2°) a) Donner l'équation de (T), tangente à (C) à l'origine O du repère

b) En quel point A, (C) admet-elle une tangente parallèle à (T). Donner l'équation de cette tangente qu'on notera (T_A)

3°) Trouver toutes les asymptotes de la courbe (C)

4°) Représenter graphiquement f tout en précisant les points d'intersection avec les axes.