

Similitude plane : Fiche

LES SIMILITUDES DIRECTES

• Comment reconnaître qu'une application f est une similitude directe ?

- f est une bijection conservant le rapport des distances et les angles orientés.
- f est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre.
- f est la réciproque d'une similitude directe.
- f admet pour écriture complexe $z' = az + b, a \in \mathbb{C}^*$.
- f a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$$

- f est la composée de 2 similitudes directes

• Comment déterminer le rapport k d'une similitude directe f ?

- si $f(A)=A'$ et $f(B)=B'$ et $A \neq B$, alors $k = \frac{A'B'}{AB}$
- si f a pour forme complexe $z \mapsto az + b$ alors $k = |a|$
- si f est la composée de 2 similitudes de rapports k_1 et k_2 , alors $k = k_1 k_2$
- si f est la réciproque d'une similitude de rapport k' , alors $k = \frac{1}{k'}$

• Comment déterminer l'angle θ d'une similitude directe f ?

- si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et $A \neq B$, alors $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$
- si f a pour forme complexe $z \mapsto az + b$, alors $\theta = \arg(a)$
- si f est la composée de deux similitudes directes d'angles θ_1 et θ_2 alors : $\theta = \theta_1 + \theta_2$
- si f est la réciproque d'une similitude directe d'angle θ' , alors : $\theta = -\theta'$

• Comment déterminer le centre Ω d'une similitude directe f ?

- si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et $A \neq B$, alors le centre Ω de f est le point, autre que I , intersection des droites (AB) et $(A'B')$, commun aux cercles (IAA') et (IBB') .

- si f a pour forme complexe $z \mapsto az + b$, alors le centre Ω est le point d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$

• Comment caractériser une similitude directe f ?

- 1- si elle a pour centre Ω et qu'elle transforme A en A' alors :

- son rapport $k = \frac{\Omega A'}{\Omega A}$

- son angle $\theta = (\overrightarrow{\Omega A'}, \overrightarrow{\Omega A})$

2- si elle transforme un bipoint (A,B) en (A',B') alors :

- son rapport $k = \frac{A'B'}{AB}$
- son angle $\theta = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$
- son centre Ω est le point, autre que I, intersection des droites (AB) et (A'B'), commun aux cercles (IAA') et (IBB').

3- si elle admet une écriture complexe $z' = az + b$

Cas où $a=1$: f est une translation de vecteur \vec{u} d'affixe b

Cas où $a \neq 1$:

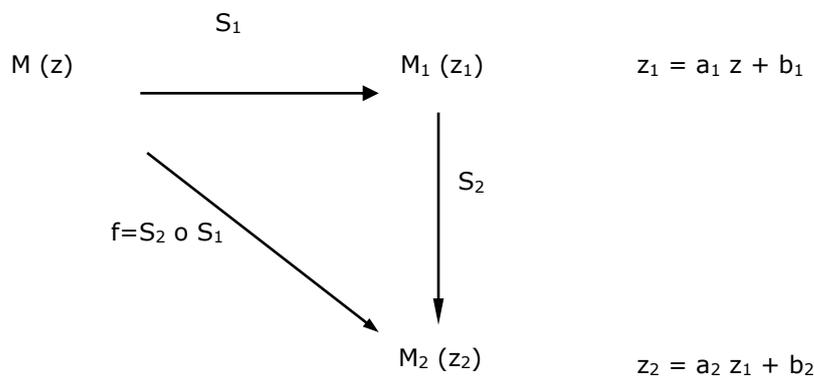
Si $|a| = 1$: f est une rotation d'angle $\theta = \arg a$

Si $a \in \mathbb{R}^*$: f est une homothétie d'angle $\theta = \arg a$

Si $|a| \neq 1, a \notin \mathbb{R}^*$: f est une similitude directe d'angle $\theta = \arg a$,
de rapport $k = |a|$, de centre $\Omega (z_\Omega = \frac{b}{1-a})$

• Comment déterminer la composée de 2 similitudes connaissant leurs écritures complexes ?

- Si S_1 et S_2 ont respectivement pour écritures complexes : $z' = a_1 z + b_1$ et $z' = a_2 z + b_2$, alors :



- Dans z_2 on remplace z_1 par son expression.
- Ecrire l'application ainsi obtenue sous la forme $z' = az + b$ et la caractériser.

• Comment construire l'image M' de M par une similitude directe f ?

- si f est la similitude de centre Ω , de rapport k et d'angle θ , alors M' est le point tel que $\Omega M' = k \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.
- si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ et $A \neq B$, tout triangle ABM a pour image le triangle A'B'M' directement semblable au triangle ABM