Calculs barycentriques – Fonction scalaire de Leibnitz

1. Fonction scalaire de Leibniz

P est plan affine euclidien.
A_i, λ_i) $_{i=1,\dots,n}$ un système de points pondérés.

1.1 Définition

- L'application $\varphi : P \to P$

$$M \to \varphi(M) = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i}^2$$

est appelée fonction scalaire de Leibniz.

- Soit O un point quelconque de P. On a : $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}$, pour tout i

Alors $MA_i^2 = MO^2 + OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i}$.

D'où $\varphi(M) = \sum_i \lambda_i (MO^2 + OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i})$

$$= \sum \lambda_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\left(\sum \overrightarrow{OA_i}\right) + \left(\sum \lambda_i\right) MO^2$$

$$\varphi(M) = \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{f(M)} + \left(\sum \lambda_i\right) OM^2$$

1.2 Discussion

- Si $\Sigma \lambda_i = 0$, $\overrightarrow{f(M)}$ est un vecteur constant $\vec{v}$. Dans ce cas $\varphi(M) = \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\vec{v}$
- Si $\Sigma \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point G, barycentre du système (A_i, λ_i) défini par :
  $\Sigma \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ i.e. $\overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$.
  Dans ce cas $\varphi(M) = \varphi(G) + (\Sigma \lambda_i) MG^2$

1.3 Ensemble E des points M tels que φ (M) soit constante

On cherche l'ensemble des points M tel que $\varphi(M) = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i}^2 = k$ où k est un réel donné.

- 1[er] cas : $\Sigma \lambda_i = 0$. Pour tout point O, on a $\varphi(M) = \varphi(O) + 2\overrightarrow{MO}.\vec{v}$.

$\overrightarrow{OM}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\varphi(O) - \varphi(M)]$. $\vec{v}$ étant un vecteur constant et φ (O) un réel fixe.

Alors φ (M) = k si et seulement si $\overrightarrow{OM}.\vec{v} = K$ où $K = \frac{1}{2}[\varphi(O) - \varphi(M)]$.

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et k = 0, alors l'ensemble E étudié est le plan P.
  k ≠ 0, alors l'ensemble E est vide.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, soit H le projeté orthogonal de M sur la droite $(O ; \vec{v})$

On a : $\overrightarrow{OM}.\vec{v} = K$

$\overrightarrow{OH}.\vec{v} = K \Rightarrow \overline{OH}.\ \bar{v} = K$

D'où $\overline{OH} = \frac{K}{\|\vec{v}\|}$. L'ensemble E est donc la droite orthogonal à $(O ; \vec{v})$ en H.

- $2^{ème}$ cas : Si $\Sigma \lambda_i \neq 0$

On a : $\varphi(M) = \varphi(G) + (\Sigma \lambda_i) MG^2$ où $\varphi(G)$ est un réel fixe.

Alors $\varphi(M) = k$ si et seulement si $MG^2 = \frac{1}{\Sigma \lambda_i}[k - \varphi(G)]$.

Posons $\frac{k - \varphi(G)}{\Sigma \lambda_i} = K$. L'ensemble E étudié est l'ensemble des points M du plan P tel que $MG^2 = K$.

- Si $K < 0$ l'ensemble E est vide.
- Si $K = 0$ $E = \{ G \}$.
- Si $K > 0$ E est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{K}$.

2. Autres lignes de niveau

2.1 Ensemble des points M tels que MA = k.MB où A et B sont des points fixes et k un réel positif donné .

- $k = 1$: on a MA = MB. L'ensemble des points M est la médiatrice de AB.
- $k \neq 1$: on a MA = k MB.

$$MA^2 = k^2 MB^2$$

$$(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$$

Soit G le barycentre de { (A , 1) ; (B , k) } et G' le barycentre de { (A , 1) ; (B , -k) }. Alors, on a : $[(1+k)\overrightarrow{MG}][(1-k)\overrightarrow{MG'}] = 0$ c'est-à-dire $(1-k^2)\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{MG'} = 0$.

L'ensemble cherché est le cercle de diamètre GG'.

2.2 Ligne de niveau $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$

Soit I le milieu de [AB]. On a $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = k$ équivaut à $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) = k$.

$(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}).(-\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}) = k$, alors $IM^2 = k + IA^2$.

- si $k + IA^2 < 0$, l'ensemble des points M est vide.
- si $k + IA^2 = 0$, l'ensemble est réduit à { I }.
- si $k + IA^2 > 0$, l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$.