Applications des complexes à la géométrie - Lieu de points

Exercice 1

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A d'affixe $\sqrt{3} - i$ et B d'affixe $\sqrt{3} + i$. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives a = –1+2i, b = 1+3i, c = 4i.
Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_B = -\sqrt{3} - i$.

Soit $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

1. Interpréter géométriquement le module et un argument de Z.
2. Écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3. En déduire la nature du triangle ABC ainsi qu'une mesure, en radians, de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

Exercice 4

1. Soient A, B et D les points du plan complexe d'affixes respectives : z_A = 2, z_B = 4 et z_D = 2 + 2i. Quelle est la nature du triangle ODB ?
2. Soient E et F les points d'affixes respectives $z_E = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_F = 1 + i\sqrt{3}$. Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

Exercice 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

Soit les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives z_A = 2+2i ; $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

1. a. Calculer le module et un argument de z_A et z_B.
b. Construire les points A, B et C.
c. Calculer $|z_A - z_B|$.
d. Quelle est la nature du triangle OAB ? (justifier la réponse).
2. a. Écrire z_C sous forme algébrique.
b. Montrer que C est le milieu du segment [OA].
3. Quelle est la nature du triangle ABC ? (justifier la réponse).

Exercice 6

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : z_A = –i ; z_B = 3 ; z_C = 2+3i et z_D = –1+2i.
1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

b. Calculer le complexe $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

3. a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

Exercice 7

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 1 cm,

on donne les points A,B, et C d'affixes respectives $-2i$; $3 + i$ et $-4 + 2i$.

1. Placer les points A, B, et C dans le plan (P).

2. On pose $Z = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. Ecrire Z sous forme trigonométrique.

3. En déduire la nature du triangle ABC.

4. Trouver l'affixe du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 8

On donne les points A, B, C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$; $z_B = 2$ et $z_C = 3 + i$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC

2. Calculer l'affixe z_D du point D pour que ABCD soit un carré.

Exercice 9

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, D et K

d'affixes respectives $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \overline{z_1}$, $z_3 = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = 1$.

Montrer que les points A, B et D appartiennent à un cercle C de centre K.

Exercice 10

On considère les points A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a = 3 + i$,

$b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

a) $z + \overline{z} = |z|$; b) $z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$ c) $(z-1)^2$ soit réel, soit imaginaire pur.

d) z^2 ait pour partie imaginaire 2 ; e) $\arg(\overline{z} + 5i) = \frac{\pi}{3}$; f) $\arg[(1+i)z + 1] = \pi$

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|\overline{z} + i| = |z - 3 + 2i|$ b) $(z - 1 - i)(\overline{z} - 1 + i) = 3$

Exercice 13

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité 2cm, on donne le point A d'affixe -2.

Soit Z le nombre complexe défini par : $Z=\frac{iz+3}{z+2}$, avec $z\neq -2$ et $z\in C$.

On pose Z = X + iY et z = x + iy avec $(x, y)\in IR^2$ et $(X,Y)\in IR^2$.

1. Déterminer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer et construire dans P les deux ensembles (C) et (D) définis par :

(C) = { M(x, y) / Z soit réel }.
(D) = { M(x, y) / Z soit imaginaire pur }.

Exercice 14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M le point d'affixe z et M' le point d'affixe Z el que $Z=\frac{z+1}{z-1}$.

1. Trouver l'ensemble (E_1) des points M tel que Z soit un réel.
2. Trouver l'ensemble (E_2) des points M tel que Z soit un imaginaire pur.
3. Trouver l'ensemble (E_3) des points M tels O, M, M' soient alignées.

Exercice 15

Pour tout nombre complexe z = x + iy ; on pose $Z=\frac{iz+3}{(1+i)z-1}$.

1. Mettre Z sous forme algébrique X + iY.
2. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que Z soit un réel.
3. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que Z soit un imaginaire pur.

Exercice 16

1. Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (1 - 3i)z - 4 = 0$.
2. a) Dans le plan complexe (P), muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm, placer les points A, B et D d'affixes respectives 1, (–1 –i) et (2 – 2i) ainsi que le point C milieu du segment [BD] dont on précisera l'affixe.

b) Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixe z tels que : $\left|\frac{z+1+i}{z-2+2i}\right|=1$.

c) Montrer que Δ passe par A. Achever alors la construction de Δ.

Exercice 17

On note A et B les points d'affixes respectives −i et 3i. On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=\frac{iz+3}{z+i}$.

1. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que $\arg z' = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
3. Soit M d'affixe z un point du cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.
À quel ensemble appartient le point M' ?

Exercice 18

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B d'affixes respectives : $z_A = -2i$, $z_B = 4 - 2i$.
On désigne par F l'application qui, à tout point M de P, d'affixe z et distinct de A, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-(4+2i)}{z+2i}$.
Déterminer l'ensemble E des points d'affixe z tels que $|z'| = 1$. Construire E.

Exercice 19

On considère le point A d'affixe $1+i$.

On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1-i}{z}$.

Le point M' est appelé le point image du point M.
1. a. Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B', image du point B d'affixe i.
b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Exercice 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par : $Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$.
1. Soit z = x +iy où x et y désignent deux nombres réels.
a. Montrer l'égalité : $Z = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - i\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$.
b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.
c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que Re(Z) soit négatif ou nul.
2. a. Écrire le nombre complexe (1 − i) sous forme trigonométrique.
b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que Z est un réel non nul si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Exercice 21

Pour tout complexe z, on pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$, et on appelle A, B M et M' les points d'affixes 1, -1, z et z' dans le plan complexe.

1.- a) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$ et en déduire $|z'|$.

Traduire géométriquement ce résultat pour le point M'.

2.- Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le complexe $r = \frac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est réel.

3.- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

4.- Utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M' connaissant M. O fera une figure.

Exercice 22

1.-Ecrire sous forme trigonométrique le complexe 1+ i.

2.- On pose $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0;+\infty[$ et $\theta \in [0;2\pi[$.

Calculer z^2 et $(1+i)\bar{z}$ en fonction de ρ et θ.

En déduire la valeur r de ρ pour laquelle on a l'égalité $z^2 = (1+i)\bar{z}$.(1)

Déterminer les valeurs de θ_0, θ_1 et θ_2 de θ telles $z = re^{i\theta}$ vérifie l'égalité (1). On note respectivement les nombres complexes d'argument θ_0, θ_1 et θ_2 .

3.- Soit A_1 et A_2 les points d'affixes respectives $z_1 - z_0$ et $z_2 - z_0$.

Calculer sous sa forme trigonométrique, le nombre complexe $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$. En déduire que le triangle OA_1A_2 est équilatéral.

Exercice 23

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1 et U* l'ensemble U privé de 1.

1.- Soit u un élément de U*. On pose $u = \cos\theta + i\sin\theta$, avec $\theta \in]0;2\pi[$.

Déterminer le module et un argument de 1-u en fonction de θ.

En déduire le module et un argument de $\frac{1}{1-u}$.

2.- a) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z =1-u où u décrit U est le cercle de centre A d'affixe 1 et passant par O.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z = \frac{1}{1-u}$ quand u décrit U*.

3.- Soit B le point d'affixe b non nul, et M le point d'affixe z.

Interpréter géométriquement le module de z-b.

a) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z = b(1-u), u décrivant U* ?

b) Quel est l'ensemble des points M d'affixe $z = \frac{b}{1-u}$, u décrivant U* ?

Exercice 24

Soit f l'application qui à chaque point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{z}$.

ON appelle C le cercle de contre O et de rayon 1.

1.- Placer sur une figure le point B d'affixe $w = \frac{1}{2}(1+i)$ et son image B' par f.

Donner le module et un argument de chacun des complexes w et w'.

2.- Soit z un complexe non nul.

Comparer les modules et les arguments de z et z'.

3.- Quel est l'ensemble des points M pour lesquels M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel ?

4.- Soit M le point de la droite D d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Montrer que son affixe vérifie $|1-z| = |z|$. Puis que $\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1$

En déduire que M' est sur un cercle Γ que l'on déterminera. Construire D et Γ