Série 1 : Exercices sur les primitives

Exercice 1 :

Déterminer une primitive de la fonction f et préciser sur quel intervalle se placer.

a) $f_1(x)=x^5+3x^2-3$ b) $f_2(x)=\frac{6}{x^2}$

c) $f_3(x)=\frac{x^4+3x^2-2}{x^2}$ d) $f_4(x)=2x^2-\frac{1}{x^3}$

e) $f_5(x)=\frac{x^2}{3}-x+3$ f) $f_6(x)=x^2+\sqrt{x}$

g) $f_7(x)=\frac{-x^3+4x^2+x}{x}$ h) $f_8(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

Exercice 2 :

Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(x_0) = y_0$ et préciser sur quel intervalle se placer.

a) $f_1(x)=x^2+2x-1,\quad x_0=1 \text{ et } y_0=3$

b) $f_2(x)=-\frac{2}{x^2}\quad,\quad x_0=1 \text{ et } y_0=0$

c) $f_3(x)=(2x-1)^2\quad,\quad x_0=2 \text{ et } y_0=4$

Exercice 3 :

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $F_1(x)=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}+4x-5\quad,\quad f_1(x)=-\frac{1}{x^2}+x+4\quad,\quad I_1=]0;+\infty[$

b) $F_2(x)=\frac{2x-1}{x+2}\quad,\quad f_2(x)=\frac{5}{(x+2)^2}\quad,\quad I_2=]-2;+\infty[$

c) $F_3(x)=x+1+\frac{2}{x+1}\quad,\quad f_3(x)=\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\quad,\quad I_3=]-\infty;-1[$

Exercice 4 :

Calculer la dérivée de F et en déduire les primitives de f.

a) $F_1(x)=x^6-3x^2\quad,\quad f_1(x)=x^5-x$

b) $F_2(x)=\frac{x+1}{x+3}\quad,\quad f_2(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$

Exercice 5 :

Vérifier que la fonction $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$ admet une primitive sur IR de la forme $f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+x+1)^2}$.

Déterminer toutes les primitives sur IR de f.

Exercice 6 :

1. Vérifier que $x \to -\frac{1}{x-1}$ est une primitive de $x \to \frac{1}{(x-1)^2}$
2. Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

   Déterminer les réels a et b tels que pour tout x ∈ IR- {-1 ; 1}, $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{a}{(x+1)^2}$.
3. En déduire une primitive de f sur IR- {-1 ; 1}.

Exercice 7 :

a. Montrer que la fonction $f: x \to \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=a+\frac{b}{(x-1)^2}$ où a et b sont des réels à déterminer.

b. En déduire une primitive de f sur I =] 1, +∞ [.

c. Mêmes questions pour $f(x)=\frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}=a+\frac{b}{(x+2)^2}$ et I =] -2, +∞ [.

Calcul d'aire

Exercice 8 :

1. Dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), représenter la fonction f : x ⟼ $-x^2+1$.
2. Déterminer l'aire, en cm², du domaine limité par la courbe C, l'axe Ox et les droites d'équations x=0 et x=1.

Exercice 9 :

C est la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f : x ⟼ $x^3 - 3x$.

Déterminer l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées (x ; y) vérifient $-1 \le x \le 0$ et $0 \le y \le f(x)$.

Exercice 10 :

1. Représenter graphiquement les fonctions f : x ⟼ x^2 et g : x ⟼ x + 2.
2. Déterminer l'aire du domaine limité par ces deux courbes.