RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

1. Systèmes linéaires dans IR²

Pour résoudre dans IR² le système :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On peut procéder par substitution, par combinaison,

1.1 Exemples de résolution par substitution

1.1.1 Méthode

Pour résoudre un tel système par substitution, on tire x ou y dans l'une des équations, on porte cette valeur dans l'autre équation . 0n obtient une équation à une inconnue. Le système admet une solution unique

si a b' - a' b ≠ 0

1.1.2 Exemples

a) Résoudre par la méthode de substitution dans IR² le système :

$$\begin{cases} x + 3y = 15 \quad (1) \\ 2x + \ y = 10 \quad (2) \end{cases}$$

Le nombre a b' - a' b = -5 . Le système admet une solution unique. Transformons l'équation (1) en exprimant x en fonction de y, puis portons cette valeur dans (2).

On a x = 15 – 3y et 2(15 – y) + y = 10. On obtient y = 4 et x = 3. La solution est S = { (3 ; 4) }.

b) Résoudre par la méthode de substitution dans IR² le système:

$$\begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ x - y = 2 \ \ (E_2) \end{cases}$$

Dans (E_2), on obtient x = y + 2, en portant cette valeur dans (E_1),on obtient y + 2 +y = 2 .Ce qui donne y = 0. Donc x= 2. 0n a: S = {(2; 0)}.

1.2 Exemples de résolution par combinaison

1.2.1 Méthode

Le principe consiste à éliminer l'une des inconnues x ou y en combinant les deux équations. Pour cela :

- On multiplie chaque équation par des nombres dans le but d'égaliser les coefficients de x ou de y dans les deux équations ;
- On ajoute on retranche membres à membres les deux équations

1.2.2 Exemples

a) Résoudre par la méthode de combinaison dans IR² le système :

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par - 2 et on additionne membre à membre. On obtient :

7y = 7. Ce qui donne y = 1 ; donc, x-3(1) = 0 . On obtient x = 3.

Finalement, l'ensemble des solutions est ; S = {(1 ; 3)}.

b) Résoudre par la méthode de combinaison dans IR² le système :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 19 & (1) \\ -6x + y = -2 & (2) \end{cases}$$

Le nombre a b' - a' b = 27 . Le système admet une solution unique. On va éliminer x, pour cela multiplions (1) par 2. On obtient :

$$\begin{cases} 6x + 8y = 38 \\ -6x + y = -2 \end{cases}$$

En additionnant membres à membres ces deux équations, on a 9y = 36 soit y = 4. En portant cette valeur dans (1) par exemple 3x + 4x4 = 19 soit x = 1. La solution est S = { (1 ; 4)}.

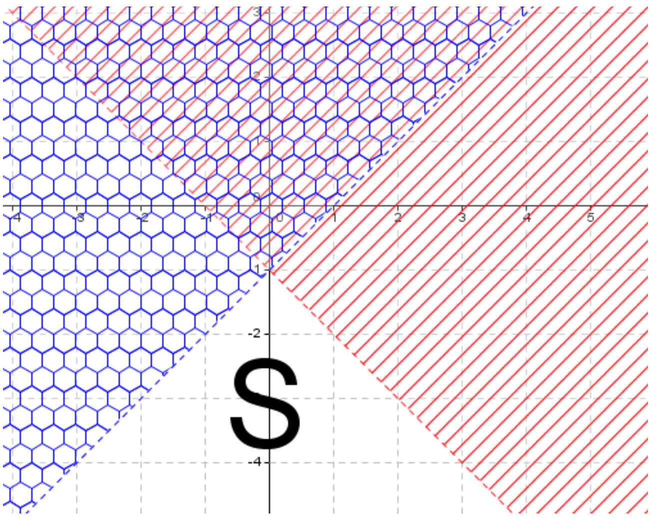
2. Résolution d' un système d'inéquations à deux inconnues

2.1 Un exemple avec Géogebra.

Résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x + y < -1 \\ x - y > 1 \end{cases}$$

- On saisit la première inéquation, puis on valide.
- Dans le menu propriété, on inverse le remplissage.
- On saisit la deuxième inéquation , puis on valide.
- On inverse aussi le remplissage.
- La solution est la partie non hachurée.



2.2 Cas général,

Pour résoudre un système , de deux équations à deux inconnues

- on « égalise » à zéro chaque inégalité
- on choisit un point arbitraire pour vérification
- on hachure les parties inutiles
- la solution est la partie non hachurée.

Pour résoudre le système,

$$\begin{cases} x + y < -1 \\ x - y > 1 \end{cases},$$

on trace les droites (d):x + y +1 = 0 et (d') : x – y - 1 = 0

(d) : x + y + 1 = 0

	A	B
x	0	- 1
y	-1	0

(d') : x - y - 1 = 0

	A'	B'
x	0	1
y	-1	0

Pour (d) 0 + 0 + 1 = 1, la partie avec l'origine vérifie x + y + 1 > 0

Pour (d') 0 - 0 - 1 = -1, la partie avec l'origine vérifie x - y - 1 < 0

On obtient la même solution .

3. Résolution d'un système linéaire dans IR^3

3.1 Méthode

Soit à résoudre le système (S_1) :

La meilleure méthode (et c'est celle du programme) est celle dite de Gauss

Description (simplifiée) de la méthode :

<u>1ère étape : Élimination</u>

On élimine à l'aide de (L_1) une des inconnues, par exemple x dans L_2 et L_3

On obtient alors un système (S_2) équivalent à (S_1), de la forme

<u>2^e^ étape :</u>

A l'aide de (L'_2) on élimine dans (L'_3) l'une des inconnues. On obtient alors un système de la forme :

équivalent à (S_1)

<u>3^e^ étape</u> : substitution remontante

On détermine z à partir de (L''_3), puis on substitue dans (L''_2)
On refait les mêmes opérations pour y et x.

3.2 Exemple

Résoudre dans IR^3 le système :

$$\begin{cases} x+y+z=3 & (L_1) \\ x-y+2z=2 & (L_2) \\ x-2y-z=-2 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 & \\ 2y-z=1 & (L'_2) \\ 3y+2z=5 & (L'_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=1 \\ 7y\quad=7 \end{cases}$$

$$ce\ qui\ donne\ \begin{cases} y=1 \\ 2-z=1 \\ z=1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$d'où\quad S=\{(1,1,1)\}$$