En Savoir plus

1. Somme et produit des racines

On considère le trinôme f(x) = $a x^2 + b x + c$, ($a \neq 0$). Dans le cas où $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distincts x' et x''
$f(x) = a(x-x')(x-x'') = a(x^2 - (x'+x'')x + x' x'') = a x^2 - a(x' + x'')x + a x' x''$. Par identification, on obtient
$b = - a (x'+x'')$ et $c = a x' x''$,d'où la formule
Dans le cas où x' et x'' existent,La somme S et le produit P des racines est définis par :

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad \text{et } P = x' x'' = \frac{c}{a}$$

Réciproquement, si on connaît la somme et le produit de deux nombres, ces nombres sont les solutions d'une équation du second degré.C'est à dire si x + y = S et xy = P, x et y sont les solutions de l'équation

$$u^2 - S u + P = 0 \text{ si } S^2 - 4P > 0$$

Exemples
(1) Pour l'équation $4x^2 + 9x + 1 = 0$,
$\Delta = 9^2 - 4.4.1 = 65$. x' et x'' existent et on a $x' + x'' = \frac{-9}{4}$ et $x' x'' = \frac{1}{4}$
(2) Une équation a deux solutions . On sait que leur somme est 4 et leur produit 3. Trouver ces solutions.
On a $S^2 - 4P = 4^2 - 4.3 = 4$. Les nombres sont solutions de l'équation $u^2 - S u + P = 0$
$\Delta = b^2 - 4 a c = S^2 - 4 P = 4$

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \text{ et } x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 6$$ L'ensemble des solutions est { 1 ; 3}.

2. Racine évidente

Parfois ,on n'est pas obligé de calculer le discriminant . Il y a des racines qu'on peut calculer directement et utiliser la somme ou le produit pour trouver l'autre racine.
Si $a + b + c = 0$, $x = 1$ est une solution évidente de $a x^2 + b x + c = 0$,
Si $a + c = b$, $x = -1$ est une solution évidente de $a x^2 + b x + c = 0$.

(1) Résoudre dans IR $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

On a $5 - 4 - 1 = 0$; d'où $x' = 1$ et $1.x'' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{5}$, d'où $S = \{ \frac{-1}{5} ; 1\}$

(1) Résoudre dans IR $23x^2 + 117x + 94 = 0$

Ici $23 + 94 = 117$ donc $x' = -1$ et $(-1).x'' = \frac{c}{a} = \frac{94}{23}$, on a $S = \{ -1 ; \frac{94}{23} \}$.

3. Exercices

1. a) Vérifier que 2 est solution de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   b) Quelle est la somme des racines ? Quel est le produit des racines ?
c) Déduire alors l'autre solution.
2 .a) Vérifier que -1 est solution de l'équation $x^2 + 3x + 2 = 0$.
   b) Quelle est la somme des racines ? Quel est le produit des racines ?
c) Déduire alors l'autre solution.

3 . Dans chacun des cas, trouver s’il existe deux nombres x et y tels que $x + y = S$ et $x.y = P$.

a) $S = 18$ et $P = 65$

b) $S = -1$ et $P = -45$

c) $S = 4$ et $P = 5$

4. Comment choisir le réel pour que l’équation $2x^2 + x - m = 0$ admette $x = -1$ comme solution. Quelle est l’autre solution ?

5. Pour chaque équation, trouver une racine évidente et calculer l’autre racine :

a) $x^2 -7x + 6 = 0$

b) $-3x^2 + 2x + 5 = 0$