

Nombres complexes : Forme algébrique

Exercice 1

Placer les points A_k d'affixes z_k dans un repère orthonormé du plan.

$$a) z_1 = -1+i \quad ; \quad z_2 = 2+i \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$b) z_1 = \sqrt{3} + i \quad ; \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$c) z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad ; \quad z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad ; \quad z_3 = 1 + i\sqrt{3}$$

Exercice 2

Déterminer la forme cartésienne du complexe.

$$z_1 = (1+i)(1-2i)$$

$$z_2 = (2-3i)(3i)$$

$$z_3 = (1+2i)(1+i)^2(3i-4)$$

$$z_4 = (5+4i)(3+7i)(2-3i)$$

Exercice 3

Effectuer les calculs suivants en présentant les résultats sous la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}$

$$(1+i)^2 \quad (1-i)^2 \quad (2+3i)^2 \quad (3+2i)^3$$

$$\frac{i-5}{3+5i} \quad \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} \quad \frac{4+5i}{2-i} - \frac{1-3i}{1+i}$$

Exercice 4

Déterminer la forme cartésienne du complexe

$$z_1 = \frac{1-i}{2i} \quad ; \quad z_2 = \frac{3-4i}{7+5i} \quad ; \quad z_3 = \frac{(3-2i)(5+i)}{(5-i)}$$

Exercice 5

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer : j^2 ; $1+j+j^2$; $\frac{1+j}{(1-i)^2} + \frac{1-j}{(1+i)^2}$

Exercice 6

On considère les deux complexes suivants : $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$.

Calculer : z_1+z_2 ; z_1z_2 ; $\frac{z_1}{z_2}$; $z_1^2 + z_2^2$; $z_1^3 + z_2^3$.

Exercice 7

f est une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par : $f(z) = 2z^3 + (1+i)z^2 - (3+2i)z - 7 + 16i$.

Calculer $f(1+i)$; $f(2-i)$; $f(2i)$.

Exercice 8

A tout nombre complexe z on associe le nombre complexe égal à $f(z) = \frac{1}{6}[(3+4i)z + 5\bar{z}]$

1. Calculer $f(3)$, $f(i)$ et $f(1-4i)$.

2. Exprimer $z' = \frac{f(z)-z}{1+2i}$ à l'aide de z et de \bar{z} .

3. En déduire que z' est réel pour tout z complexe.

Exercice 9

Résoudre le système d'inconnues z et z' de nombres complexes.

$$a) \begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - z' = i \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ z - z' = -1 + 2i \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (1+i)z + (1-i)z' = 2+i \\ 3z - 2iz' = 4-i \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} z - 2iz' = 5i \\ 2\bar{z} - (1+i)\bar{z}' = -2 + 6i \end{cases}$$