



Fonctions puissances

1. Puissance réelle d'un nombre strictement positif

Quel que soit le réel strictement positif a et quel que soit le réel b, le réel ab est noté eblace

2. Propriétés

En utilisant les propriétés de fonctions In et exponentielle, on retrouve toutes les propriétés des puissances :

Quel que soit le réel strictement positif a et quels que soient les réels b et c,

$$a^{b+c} = a^b.a^c$$

$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$$

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\left(a^{b}\right)^{c}=a^{bc}$$

3. Fonction puissance

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{\alpha}$ où α est un nombre réel.

f est définie sur $D =]0; +\infty[$

Limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^{\alpha} = \lim_{x\to 0} e^{\alpha \ln x}$$

-
$$\sin \alpha > 0$$
,

$$\lim_{x\to 0^+}\alpha\ln x=-\infty\quad \text{donc}\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=\lim_{x\to 0^+}e^{\alpha\ln x}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\alpha\ln x=+\infty\quad \text{donc}\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}x^\alpha=\lim_{x\to +\infty}e^{\alpha\ln x}=+\infty$$

$$-\text{ si }\alpha<0, \quad \lim_{x\to 0^+}\alpha\ln x=+\infty \quad \text{ donc } \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=\lim_{x\to 0^+}e^{\alpha\ln x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\alpha\ln x=-\infty\quad donc\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}x^\alpha=\lim_{x\to +\infty}e^{\alpha\ln x}=0$$

Dérivabilité et dérivée

$$f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

f est la composée des fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto \alpha^{\ln x}$ qui sont dérivables sur $D=\left]0;+\infty\right[$, donc f est dérivable.

La formule de dérivation d'une fonction composée nous permet d'avoir $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha}$. Ce qui donne

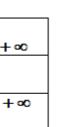
 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. On remarquera que c'est encore de la forme de la dérivée de la puissance entière.

1/2

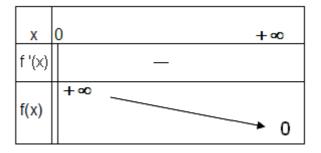


Tableaux de variations

 $\alpha > 0$



 $\alpha < 0$



Branches infinies

Si $\alpha < 0$,

Χ

f'(x)

f(x)

 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \text{ donc on a une asymptote parallèle à (y'Oy) d'équation } x = 0.$

 $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0 \quad \text{donc on a une asymptote parallèle à (x'Ox) d'équation y = 0.}$

Si $\alpha > 0$,

 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \ \text{donc f est prolongeable par continuité en 0.}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \ \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^{\alpha-1}$$

- si
$$\alpha > 1$$
, alors $\alpha - 1 > 0$, et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha - 1} = +\infty$

donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (y'Oy).

$$\text{- si }\alpha>1, \text{ alors } \alpha-1 < 0 \text{ } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha-1} = 0$$

donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (x'Ox).

Courbes

