Fonctions logarithmes - problèmes

➢PROBLEME 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O; $\vec{i},\vec{j}$) (unité 3 cm).
On considère la fonction numérique f définie sur R par : f (x) = ln $(x^2 -2x + 2)$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans (O; $\vec{i},\vec{j}$).

Partie A : Etude d'une fonction
1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2-2x + 2 > 0$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variation de f sur R.
3. Déterminer les limites de f en + ∞ et en -∞.
4. Représenter (C) et la droite (Δ) d'équation y = x : on montrera que la droite d'équation x = 1 est un axe de symétrie de (C) et on placera les points d'abscisse 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B : On s'intéresse à l'intersection de (C) et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, φ (x) = f (x)-x.
1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur R.
2. a) Déterminer la limite de φ en -∞.
b) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right).$$

En déduire la limite de φ en + ∞.
3. Montrer que φ est une bijection de R sur R.
En déduire que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point et un seul.
On désigne par α l'abscisse de ce point. Montrer que 0,3 < α < 0,4.

Partie C
On pose J = [0,3 ; 0,4].
1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J.
En déduire que si x appartient à J alors f (x) appartient à J.
2. a) Prouver que, pour tout x de J, | f ' (x) | ≤ 0,95 (on pourra montrer que f ' est croissante sur J).
b) En déduire que, pour tout x de J, | f (x) - α | ≤ 0,95 | x - α |.
3. On définie la suite (u_n) par :
$u_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Prouver que, pour tout n : $u_n \in J$. et $|u_{n+1} - \alpha| \le 0,95|u_n - \alpha|$ ensuite

$|u_n - \alpha| \le 0,1 \times (0,95)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_0,
$| u_n - \alpha | \le 10^{-3}$.

➢PROBLEME 2

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle [0 ; +∞[par : $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln x}{x^2}$.

Partie A I. - Étude des fonctions f_n

1. Calculer $f'_n(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est n - 2 - 2n ln x.
2. Résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$. Étudier le signe de f'_n.
3. Déterminer la limite de f_n en +∞.
4. Établir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II. - Représentation graphique de quelques fonctions f_n

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer (C_2) et (C_3)
2. a) Calculer $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?

b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe (C_4) à partir de (C_2) et (C_3). Tracer (C_4).

Partie B - Calculs d'aires

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale $I = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$
2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes (C_n) et (C_{n+1}) et les droites d'équations x = 1 et x = e.
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe (C_n) et les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = e.

a) Calculer A_2.

b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

Partie C - Étude sur l'intervalle [1 ; +∞[de l'équation $f_n(x) = 1$.

Dans toute la suite, on prendra $n \geq 3$.

1. a) Vérifier que, pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$.

b) Vérifier que l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $]1; e^{\frac{n-2}{2n}}[$.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet sur l'intervalle $[e^{\frac{n-2}{2n}}; +\infty[$ exactement une solution notée α_n.
3. On se propose de déterminer la limite de la suite (α_n).

a) Calculer $f_n(\sqrt{n})$ et montrer que, pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$.

b) En déduire que, pour $n \geq 8$, on a $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ et donner la limite de la suite (α_n).

➢PROBLÈME 3

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞ [par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire g
On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; + ∞ [par :
$g(x) = x^2 - 2\ln x$.
1. Étudier le sens de variation de g.

2. En déduire le signe de g(x) sur]0 ; + ∞ [.

Partie II : Etude de la fonction f.

On considère la fonction numérique f définie sur]0 ; + ∞ [par : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
1. Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Déterminer la limite de f en + ∞.
b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).
c) Déterminer la position de (C) par rapport à (D) sur]0 ; + ∞[.
Montrer, en particulier, que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3. Étudier le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ).
Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation f(x) = 0 a une solution unique α.
Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$.
6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Partie III . Etude de deux suites numériques associées.

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.
1. a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n=4\int_{x_n}^{x_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

b) Montrer que $a_n=\frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n.

En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

PROBLÈME 4

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
2. Calculer la limite de f (x) lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers + ∞.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f et en déduire le signe de f (x) pour tout x appartenant à] 0 ; + ∞ [.
4. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, l'unité graphique est 5 cm.

Tracer la courbe C représentative de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par : $g(x)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g. Déduire de la partie A le sens de variation de g sur] 0 ; + ∞ [.
2. Vérifier que g = $h \circ k$ avec h et k fonctions définies sur] 0 ; + ∞ [par :

$h(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$ et $k(x)=\frac{1}{x}$.

En déduire la limite de g en + ∞ et en 0.

3. Donner le tableau des variations de g sur] 0 ; + ∞ [.

Partie C

1. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 1. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \leq x \leq \lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$ ».

En utilisant les résultats de la partie B :

a) calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ;

b) déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$;

c) justifier l'affirmation : « L'équation $A(\lambda) = 5$ admet une solution unique notée λ_0 ».

Puis donner un encadrement de λ_0 d'amplitude 10^{-2}.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie sur N* par : $u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Montrer en remarquant que $\ln(u_n) = g(n)$, que :

a) la suite (u_n) est une suite croissante ;

b) la suite (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

PROBLEME 5

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur]0; + ∞[par :

$f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude pour n = 1

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (x)$.
Que peut-on en déduire pour C_1 ?
2. Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1.
3. Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe C_1.
Étude pour n = 2
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x)$.
Que peut-on en déduire pour C_2 ?
5. Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2.

Partie B
1. Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de C_1 et C_2.
2. Tracer C_1 et C_2.

Partie C

n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

1. On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.
Calculer $F'(x)$, en déduire I_1.

2. En utilisant une intégration par parties montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

3. Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations x = 1 et x = e.
Partie D
1. En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul : $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$
2. En utilisant un encadrement de ln x sur [1 ; e], montrer que, pour tout n entier naturel non nul : $0 \le I_n \le 1$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$. .

➢ PROBLÈME 6
Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique : 5 cm.
1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
Déterminer les asymptotes de (C).
2. Étudier le sens de variation de f.
Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$ une solution unique, notée α.
Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
Donner, suivant les valeurs de x, le signe de f (x) sur $]0, +\infty[$

4. Tracer la courbe (C).

Partie B - Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.
2. a) Soit φ la fonction définie, pour tout x > 0 par : $\varphi(x) = x - x^2 + \ln x$.
Calculer $\varphi'(x)$
En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$
b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
c) En déduire la position relative de (C) et de (D).
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).
a) Hachurer ce domaine.
b) Soit A son aire, en cm^2. Écrire la valeur exacte de A comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C - Étude d'une suite

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e}; \alpha\right]$. On note M_0 le point de (C) d'abscisse x_0.

1. a) Donner une équation de la tangente (T_0) à (C) en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
b) Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses.
Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. On considère la fonction h définie sur $\left]\dfrac{1}{e}; \alpha\right]$ par : $h(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0)=x_1$).
a) Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x)\times f(x)}{[f'(x)^2]}$.
b) Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$.
c) En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.
d) En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$.
En déduire que $\dfrac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.
3. a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$, h(x) appartient à $\left]\dfrac{1}{e};\alpha\right]$.
b) On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.
Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

PROBLEME 7

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A. - Etude d'une fonction g

soit g la fonction définie sur]0,+∞[par : $g(x)=x \ln x - x + 1$

et C sa représentation graphique dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Étudiez les limites de g en 0 et en + ∞.

2) Étudiez les variations de g. En déduire le signe de g(x) en fonction de x.

3) On note C' la représentation graphique de la fonction $x \to \ln x$ dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Montrez que C et C' ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de [1, e],on a : $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$.

On ne demande pas de représenter C et C'.

4.a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J = \int_1^e (x-1)\ln x \, dx$.

b) Soit Δ le domaine plan défini par : $\Delta = \{ M(x, y);\ l \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x \}$.

Déterminer, en cm^2, l'aire de Δ.

Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de cette aire.

PARTIE B. ETUDE D'UNE FONCTION f

Soit f la fonction définie sur]1, +∞[par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\ln x$.

1° Étudiez les limites de f en +∞ et en 1.

2) Déterminer le tableau de variation de f (on pourra remarquer que f'(x) s'écrit facilement en fonction de g(x)).

3) Tracer la courbe représentative de f dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

PARTIE C - ETUDE DE L'EQUATION $f(x) = \dfrac{1}{2}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3,5 < \alpha < 3,6$.

2) Soit h la fonction définie sur]1, +∞[par : $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$.

b. Etudier le sens de variation de h.

c. On pose I = [3,4]. Montrer que pour tout x élément de I on a h(x) appartient à I et $|h'(x)| \leq \dfrac{5}{6}$.

3. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

Justifier successivement les trois propriétés suivantes :

a. Pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{5}{6} |u_n - \alpha|$.

b. Pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

c. La suite (u_n) converge vers α.

4. Donner un entier naturel p, tel que des majoration précédentes on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Indiquer une valeur décimale approchée de 10^{-3} près de α.

➢PROBLEME 8

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction f est majorée par une fonction g (ce qui signifie aussi que g est minorée par f) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f(x) \leq g(x)$.

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$;

on notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g.

On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Étudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$; calculer h(0). (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2) En déduire que pour tout réel x positif ou nul, $\dfrac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$

3) Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \to kx$, majorant la fonction $f : x \to \ln(1+x)$ sur $[0;+\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1) Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_1(x) = \ln(1+x) - x$.

2) Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.

3) Montrer que pour tout réel x positif ou nul : $\ln(1+x) \leq x$.

4) En déduire que si $k \geq 1$, alors :pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.

5) Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.

Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \dfrac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k .

(L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6) En déduire les valeurs de k strictement positives telles que : pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.

PARTIE C : 1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^1 \ln(1+x)dx$

(On remarquera éventuellement que : $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$).

En déduire le calcul de $J = \int_0^1 (x - \ln(1+x))dx$ puis de $K = \int_0^1 \left(\ln(1+x) - \dfrac{2x}{x+2}\right)dx$

(Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{2+x}$).

Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C, Γ et la droite D obtenues dans la partie A.

2) Soit u la fonction définie sur [0;1] de la façon suivante : $u(0) = 1$ et si $x \neq 0$,

$$u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

a. Démontrer que la fonction u est continue sur [0;1].

b. On pose : $\int_0^1 u(x)dx$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :
$\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leq L \leq 1$
En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.

PROBLÈME 9

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

PARTIE A : Etude d'une fonction f et de sa courbe représentative C

On considère la fonction f, définie sur]0 ; + ∞[par : $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$

et on désigne par C sa courbe représentative relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Déterminer les limites de f en +∞ et 0.
2) Montrer que f est dérivable sur]0 ; + ∞[et calculer f '(x).
3) Soit u la fonction définie sur]0 ; + ∞[par u(x) = ln x + x - 3.
a) Étudier les variations de u.
b) Montrer que l'équation u(x) = 0 possède une solution unique α dans l'intervalle [2,3].
Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
c) Étudier le signe de u(x) sur [0 ; + ∞[.
4) a) Étudier les variations de f.
b) Exprimer ln α comme polynôme en α.

Montrer que : $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5) a) Étudier le signe de f(x).
b) Tracer C.

PARTIE B : Etude d'une primitive de f sur]0 ; + ∞ [

Soit F la primitive de f sur]0 ; + ∞ [qui s'annule pour x = 1.
On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
1) a) Sans calculer F(x), étudier les variations de F sur]0 ; + ∞ [.

b) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2) Calcul de F(x)

a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t\, dt$. (on pourra faire une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout x strictement positif : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

c) En déduire l'expression de F(x) en fonction de x.
3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.
En déduire la limite de F en 0.

b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1, $F(x) = x\ln x(1-\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x})+3$

En déduire la limite de F en + ∞.
c) Dresser le tableau de variation de F.
d) Tracer Γ sur le même graphique que C.
4) Calcul d'une aire : Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

➢PROBLÈME 10

Le but du problème est l'étude d'une fonction f, d'une de ses primitives et d'une suite attachée à cette fonction. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2\text{ cm et }\|\vec{j}\| = 5\text{ cm}$.

Partie A : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On note (C) sa courbe représentative.
1. Montrer que f est paire. Étudier ses variations sur [0 ; +∞ [et déterminer sa limite en + ∞. Tracer sa courbe (C).
2. Montrer que f établit une bijection de [0 ; +∞[sur]0 ; 1].
On note y un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1]. Exprimer en fonction de y le seul réel positif x vérifiant f(x) = y.

Partie B : Soit F la fonction définie sur R par $F(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
(On admettra que, pour tout réel x, $x+\sqrt{1+x^2} > 0$).
1. Calculer F'(x). En déduire que F est la primitive de f sur R qui s'annule en 0.
2. a) Déterminer la limite de F en + ∞.
b) Montrer que F est impaire.
c) En déduire la limite de F en- ∞.
3. Soit λ un réel strictement positif. On note A (λ) l'aire en cm^2 de la partie du plan constituée des points M(x ; y) tels que $\lambda \le x \le 2\lambda$ et $0 \le y \le f(x)$.
Exprimer A (λ) en fonction de λ ; donner la valeur exacte de A (λ) et déterminer la limite de A (λ) quand λ tend vers + ∞.

Partie C :

On pose $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.
1. Calculer u_0. Calculer u_3 à l'aide d'une intégration par parties. (Remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$).

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1], $0 \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$.

En intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1], montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.