Généralités sur les fonctions (1)

Exercice 1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+.....+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^3+x}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\frac{\pi}{2}-x)\tan x$

Exercice 2 - On donne $f(x)=\sqrt{x}-x$. Vérifier que pour tout $x\geq 4$, $f(x)\leq -\frac{1}{2}x$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3 - Démontrer que :
a) pour tout réel x, $\sin^4 x \leq \sin^2 x$.
b) pour tout x de [0 ; 1], $1-\frac{x}{2} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1-\frac{x^2}{2}$
c) pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x^2} \leq \frac{8}{x^2+3} \leq \frac{8}{x^2}$

Exercice 4 - Démontrer que, pour tout entier non nul n, si f est dérivable alors f^n est dérivable et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$:
a) en raisonnant par récurrence.
b) en utilisant la dérivation d'une fonction composée.
c) en utilisant la définition du nombre dérivé en un point x quelconque.

Exercice 5 - Soit f une fonction dérivable. Montrer que :
a) si f est paire, alors f ' est impaire.
b) si f est impaire, alors f ' est paire.
c) si f est périodique de période T alors f' est aussi périodique de période T.

Exercice 6 - Calculer les limites suivantes en utilisant les nombres dérivés :

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1 - x}$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}}$

Exercice 7- Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point a indiqué :

a) f(x) = |sinx| , a = 0 ;

b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-1} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = x - 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 8 - Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^n$

b) $f(x) = \cos^2(5x - \dfrac{1}{x})$

c) $f(x) = \cos(\cos x)$

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2(x\sqrt{x})}$

Exercice 9 - Pour quelle restriction, la fonction f définie par $f(x)=x^2-2x$ admet-elle une réciproque que l'on explicitera.

Exercice 10 - Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes et tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

f) $f(x) = x\sqrt{x}$

g) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 2}$

i) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$;

i) $f(x) = x|x|$

k) $f(x) = |x+1| + \dfrac{1}{x-1}$

l) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

m) $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|}$

n) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

Exercice 11 - Soit f une fonction admettant sur un intervalle ouvert I une dérivée seconde f " et x_0 un point de I et soit C la courbe représentative de f et T sa tangente au point A(a, f(a)). Démontrer que :
a) si f " > 0 sur I , alors C est au-dessus de T sur I
b) si f " < 0 sur I, alors C est au-dessous de T sur I
c) si f " s'annule au point a et change de signe alors C traverse T au point A.

Exercice 12 - Soit f la fonction définie par f(x)= 2x-sinx.
a) Etudier la parité de f.
b) Exprimer $f(x + 2\pi)$ en fonction de f(x).
c) En déduire qu' on peut étudier f sur $[0 ; \pi]$et obtenir toute la courbe de f à l'aide d'une translation à préciser.
d) Etudier les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
e) Montrer que quel que soit le réel x, $2x-1\leq f(x) \leq 2x+1$. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
f) Soient D_1 et D_2 les droites d'équation respective y = 2x-1 et y = 2x + 1. Déterminer les points d'intersection de C avec D_1 et D_2 en précisant les tangentes en ces points.
g) Etudier la position de C par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
h) Tracer C.

Exercice 13 - Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2$.

1. Etudier les variations de f.
2. Etudier la position de sa courbe représentative C par rapport à sa tangente au point d'abscisse
3. Tracer la courbe C.

Exercice 14 - Soit f la fonction définie par $f(x)= x^4- 2x^2$.
1. Etudier les variations de f.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle [0 ; 1]. Montrer que g admet une réciproque.
3. Construire les représentations graphiques de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé.
4. Calculer (g^{-1}) (x) de deux façons.