Probabilités

Il existe deux manières d'introduire la notion de probabilité.
- La probabilité "subjective" d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que l'on a que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude. Cette croyance peut atteindre deux extrêmes : certitude que l'événement est réalisé (probabilité 1) et certitude qu'il n'est pas réalisé (probabilité 0). La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- La probabilité assimilée à une fréquence : on ne définit alors la probabilité qu'à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un événement est la fréquence d'apparition de cet événement. C'est un nombre compris entre 0 et 1 ; 0 signifiant que l'événement n'apparaît jamais et 1 signifiant qu'il apparaît chaque fois qu'on renouvelle l'expérience.
Les deux positions esquissées ci-dessus donnent deux notions qui fonctionnent de la même manière.

1. Définitions

Une expérience est dite aléatoire lorsque le résultat est imprévisible.

Dans une expérience aléatoire :
- l'univers $\Omega = \{ e_1 ; e_2 ;...; e_n\}$ est l'ensemble des cas possibles ou éventualités ou issues.
- un événement est une partie de l'univers Ω.
- un événement élémentaire est une partie à un élément.
- l'événement impossible est la partie vide $\varnothing$.
- Ω est l'événement certain.

Soit A et B deux événements de l'univers Ω.
- l'événement " A ou B" est l'événement $A \cup B$.
- l'événement " A et B" est l'événement $A \cap B$
- l'événement contraire de A est $\overline{\mathbf{A}} = C_\Omega A$.

Exemple : on lance un dé cubique et on note le numéro de la face supérieure.

2. Probabilité

Définition

Soit Ω un univers à n éléments : $\Omega = \{ e_1 ; e_2 ;...; e_n\}$.
On définit une probabilité p sur Ω en associant à chaque élément e_i de Ω un nombre réel positif p (e_i) vérifiant :
1- chacun des nombre p (e_i) est compris entre 0 et 1.
2- leur somme est égal à 1 : $p(e_1)+ p(e_2)+...+ p(e_n)=1$.
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités de toutes les éventualités appartenant à A.

Propriétés

- $p(\varnothing) = 0$, $p(\Omega)=1$.

- pour tous événements A et B d'un univers Ω : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

- si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

- un événement A et son événement contraire $\overline{\mathbf{A}}$ sont incompatibles, donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Cas d'équiprobabilité

Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas : la probabilité d'un événement élémentaire e_i est : $p(e_i) = \frac{1}{\text{card}\,\Omega}$.

et la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemples d'équiprobabilité :
- lancers d'un dé normal non truqué.
- tirages dans une urne d'objet indiscernables .
- tirage au hasard dans un jeu de cartes.

Pour calculer p(A) il faut donc effectuer des dénombrements.