Suites définies par une somme

Exercice 1 : Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{2}{1+\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{n}{1+n}$.

Démontrer que, pour tous n et k de IN* tels que $1 \le k \le n$; $\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \ge \frac{1}{1+n}$.

En déduire que $u_n \ge \frac{1}{2}n$ et déterminer la limite de (u_n).

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie, pour $n \ge 1$, par : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

Démontrer que (u_n) est majorée par 1 et convergente.

Exercice 3 : Soit (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \ldots + \frac{n}{n+n^2}$.

Démontrer que, pour tout n de IN*, $\frac{1}{2} \le v_n \le \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

En déduire que (v_n) et convergente et préciser sa limite.

Exercice 4 : (u_n) est la suite définie, pour $n \ge 1$, par : $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Vérifier que, pour tout entier k non nul, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

En déduire une expression simple de u_n en fonction de n et la limite de (u_n).

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie, pour $n \ge 1$, par :

$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

1. Démontrer que, pour $n \ge 1$, $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{n}{n+1}$.

2. Etudier la convergence des suites définies par : $v_n = \frac{n}{n+\sqrt{n}}$ et $w_n = \frac{n}{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) et convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6 : On se propose de démontrer que pour quel que soit l'entier naturel $\alpha \ge 2$, la suite définie, pour tout entier $n \ge 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente.

1. Cas $\alpha = 2$.
a. Calculer u_1, u_2 et u_3.
b. Justifier la croissance de (u_n).

c. Soit k un entier tel que $k \geq 2$; justifier que l'on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$, puis démontrer l'égalité $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

d. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire la convergence de (u_n).

2. Cas $\alpha \geq 3$.

a. Justifier la croissance de (u_n).

b. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$ et en déduire que (u_n) est majorée par 2. Conclure.