Généralités sur les suites numériques

1. Définition

Une suite u est une application de IN dans IR.
On note u ou (u_n).

Exemples :
- Soit $f: x \mapsto f(x) = 2x+5$. On pose $u_n = f(n)$ la suite (u_n) de terme général u_n est définie pour tout n de IN.
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_n = 2 u_{n-1} - 3$ pour tout $n>0$.

2. Suites majorées, minorées, bornées – comparaison des suites

2.1 Suites majorées, minorées, bornées

Définition

(u_n) est une suite à termes réels.
- (u_n) est majorée s'il existe une réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$. M est appelé un majorant de (u_n).
- (u_n) est minorée s'il existe une réel m tel que pour tout n, $u_n \geq m$. m est appelé un minorant de (u_n).
- (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemples : La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\ln n}{n+1}$ est majorée par $\frac{n-1}{n+1} < 1$, et minorée par 0. D'où (u_n) est bornée.

2.2 Comparaison des suites

- Soient deux suites (u_n) et (v_n). On dit que (u_n) est majorée par (v_n) s'il existe un indice k tel que, pour tout $n \geq k$, $u_n \leq v_n$. Dans ce cas, on dit aussi que (v_n) est minorée par (u_n).

- Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour n assez grand $u_n \leq v_n \leq w_n$, on dit que (u_n) et (w_n) encadrent (v_n).
- Si (v_n) majore (u_n) à partir d'un indice k et si (v_n) est majorée alors (u_n) est aussi majorée.

Démonstration : M est un majorant de (v_n), $u_n \leq v_n \leq M$

3. Suites monotones

3.1 Définition

(u_n) est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$.
(u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
(u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

Remarque : On parle de suite monotone a partir de certain indice.

3.2 Méthodes pour étudier la monotonie d'une suite

. (u_n) est croissante si et seulement si $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

. on suppose que (u_n) est à termes positifs ; (u_n) est croissante si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

. on suppose qu'il existe une fonction f croissante sur IR_+ tel que $u_n = f(n)$ alors (u_n) est croissante.

Exemples

. $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + . . . + \frac{1}{n^2}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

. $u_n = \frac{5^n}{n\,!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1} \leq 1$

. $u_n = \frac{2n+5}{n+3}$, on a $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$

4. Suites périodiques

Définition

Une suite périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que $u_{n+p} = u_n$.

p est appelé une période de (u_n).

Exemples :

. (u_n) telle que $u_{n+1} = u_n$ est une suite de période 1. Ce sont les suites constantes.

. $u_n = \cos n\frac{\pi}{3}$; $u_{n+6} = u_n$.

5. Limite d'une suite

5.1 Définition

- Dire que la suite (u_n) a pour limite L signifie que lorsque n prend des valeur de plus en plus grandes, les nombres un finissent par être compris entre $L - \alpha$ et $L + \alpha$ aussi petit que soit α $(\alpha > 0)$.
On note lim u_n = L.

- Dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que lorsque n prend des valeur de plus en plus grandes, les nombres un finissent par dépasser n'importe quel réel M aussi grand soit-il.
On note $\lim u_n = \infty$.

- Si (u_n) est minorée par (v_n) et $\lim v_n = \infty$ alors $\lim u_n = \infty$.

5.2 Suites de référence

On compare la suite à étudier, si c'est possible, avec des suites dites de référence

Exemples de suites de référence

Suites tendant vers ∞ : suite logarithmique (ln n) ; suite "puissance" (n^{α}) pour $\alpha > 0$; suite géométrique (q^{n}) pour q>1.

Suites tendant vers 0 : suite logarithmique inverse $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$; suite "puissance" (n^{α}) pour $\alpha < 0$; suite géométrique (q^{n}) pour 0<q<1.

Théorème

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Composition de limites

- f est une fonction définie sur I, (u_n) une suite d'éléments de I. Soit a et λ des réels.

Si lim u_n=a et $\lim_{a} f(x) = \lambda$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lambda$

Exemple : Soit le suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.
La suite $(\cos u_n)$ est définie et $\lim_{x\to 2} \cos x = \cos 2$, alors lim $(\cos u_n)$ = cos 2.

- f est une fonction définie sur I, (u_n) une suite d'éléments de I. Si $\lim u_n = \infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$.

- Si deux suites convergentes (u_n) et (v_n) sont telles que, à partir d'un certain indice $u_n > v_n$, alors $\lim u_n \geq \lim v_n$.

Remarque : passage à la limite dans les inégalités larges.

- (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes de limites L, (x_n) une suite telle qu'à partir d'un certain indice $u_n \leq x_n \leq v_n$, alors (x_n) est elle aussi convergente de limite L.

Exemple : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$, et $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$.

- Si la suite ($|u_n - L|$) est majorée à partir d'un certain indice par une suite convergeant vers 0, alors (u_n) tend vers L.