NOMBRES PREMIERS

1. Nombres premiers

1.1 Définitions

On dit qu'un entier naturel n est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et n .

Exemples :

1 n'est pas premier, puisqu'il n'a qu'un seule diviseur : lui-même.

0 n'est pas premier puisqu'il est divisible par tous les nombres non nuls

2 est premier : les seules diviseurs de 2 sont 1 et 2.

1.2 Théorème

Tout entier naturel n non premier supérieur ou égal à 2 possède au moins un diviseur premier. Son plus petit diviseur est 1

Démonstration :

La propriété est vraie pour n = 0 : tous les nombres premiers sont des diviseurs de 0.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 :

Si n n'est pas premier, alors il possède au moins un diviseur. Notons p le plus petit diviseur de n.

- Si p est premier, alors la propriété est vraie.

- Si p n'est pas premier, alors il possède un diviseur d différent de 1 et de p. donc $1 < d < p$

1.3 Théorème

Tout nombre non premier a admet un diviseur premier dont le carré est inférieur ou égal à a.

Démonstration :

Soit d le plus petit diviseur de a : c'est un nombre premier, car sinon, il existe un nombre k qui divise d, et alors k divise aussi , et d ne serait pas le plus petit diviseur de a.

Posons a = dq. Donc q est un diviseur de a, et $q \geq d$, puisque d est le plus petit diviseur de a.

Comme $q \geq d$, on a $d.q \geq d^2$. Ainsi $a \geq d^2$

Crible d'Eratosthène :

On écrit tous les nombre entier naturels de 1 à 100.

Supprimer les multiples de 2 autres que 2

On supprime ensuite les multiples de 3 autre que 3.

Et ainsi de suite, on supprime les multiple de 5 autres que 5, les multiples de 7 autres que 7….

Seuls les nombres premiers ne sont pas supprimés .

2. Décomposition d’un nombre en produit de facteurs premiers

2. 1 Existence de la décomposition

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou est un produit de nombres premiers.

- Si n est premier,alors la propriété est établie
- si n n’est pas premier, alors son plus petit diviseur d est premier :
    - si d est premier, alors la propriété est établie.
- si d n’est pas premier, alors on recommence comme précédemment…

De proche en proche, on obtient une suite d’entiers naturels p_1, p_2, p_3,…..p_n, tels que a = p_1. p_2.p_3.….p_n,
les nombres p_1, p_2, p_3,…..et p_n, ne sont pas nécessairement distincts.

Exemple :

$$144=2^4.3^2$$

$$480\,200=2^{3.}5^2.7^4$$

Disposition pratique

On trace un trait verticale, on écrit à gauche de ce trait le nombre à décomposer., et on divise ce nombre successivement par les nombres premiers dans l’ordre croissant !

Exemples

Exemple1

1400	2	On divise 1400 par 2, le quotient est 700
700	2	On divise 700 par 2 , le quotient est 350
350	2	On divise par 2, le quotient est 175, qui n’est plus divisible par 2, ni par 3
175	5	on divise par 5, le quotient est 35,
35	5	on divise par 5, le quotient est 7, qui n’est plus divisible par 5
7	7	On divise par 7.
1		

Alors $1400=2^3.5^{2.}7$

Exemple 2

26 413 695	3
8 804 565	3
2 934 855	3
978 285	3
326 095	5
65 219	7
9 317	7
1 331	11
121	11
11	11
1	

$$26\,413\,695=3^4.5.7^2.11^3$$

2.2 Condition de divisibilité

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à deux, décomposés en produit de facteurs premiers

A divise b si et seulement si tout facteur premier premier figurant dans la décomposition de a figure aussi dans la décomposition de avec un exposant supérieur ou égal à celui qu'il a dans la décomposition de a.

Exemples

$a=2^{3}\cdot 3^{2}.5$ et $b=2^{4}\cdot 3^{5}.5^{2}\cdot 7^{2}$ 2 a pour exposant 3 dans a, et 4 dans b, 3 a pour exposant 2 dans a, et 5 dans b, et 5 a pour exposant 1 dans a, et 2 dans b. Donc a divise b.

$a=2^{4}\cdot 3.5^{2}.7$ et $b=2^{4}\cdot 3^{5}.5.7$. L'exposant de 5 est 2 dans a, et 1 dans b, donc a ne divise pas b

2.3 PGCD, PPCM et décomposition

a et b sont deux entiers naturels décomposés en produit de facteurs premiers

- Le PGCD de a et b est égal au produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, chacun des facteurs étant affecté du plus petit exposant avec lequel il figure dans la décomposition de a et b.

- Le PPCM de a et b est .égal au produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, chacun des facteurs étant affecté du plus grand exposant avec lequel il figure dans la décomposition de a et b

Exemples

$a=2^{2}\cdot 3^{3}.11$ $b=2^{4}\cdot 3^{5}.5^{2}\cdot$ $PGCD(a;b)=2^{2}\cdot 3^{3}$ $PPCM(a;b)=2^{4}\cdot 3^{5}.5^{2}\cdot 11$

$a=2^{4}\cdot 3.5^{3}.7$ et $b=2^{4}\cdot 3^{5}.5^{2}\cdot 7$. $PGCD(a;b)=2^{4}\cdot 3.5^{2}\cdot 7$ $PPCM(a;b)=2^{4}\cdot 3^{5}.5^{3}\cdot 7$

2.4 Relation entre PPCM et PGCD

Le produit de deux entiers a et b est égal au produit de leur PPCM et de leur PGCD :

PPCM (a;b) .PGCD (a;b) = a.b