Fonctions continues

1. Continuité en un point x_0

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$.

1.1 Définition :

f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est $f(x_0)$, autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$

f est elle continue en x_0 = -1 ?

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \to -1} x - 1 = -2 = f(-1)$$

Donc f est continue en x_0 = -1

1.2 Continuité à gauche – Continuité à droite :

- Si f est définie sur $[x_0; x_0 + \alpha[, \ \alpha > 0$, f est continue à droite de x_0 si la $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Si f est définie sur $]x_0 - \alpha ; x_0]$, f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On rappelle que f admet une limite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Donc f est continue en x_0 si et seulement f est continue à gauche en x_0 et continue à droite en x_0, c'est-à-dire si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$$

Donc f est continue en x_0

1.3 Opérations sur les fonctions continues en un point

- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonction f + g, f.g et $\lambda . f$ (où λ est une constante réelle) sont continues en x_0.

Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0

- Si f est continue en x_0 et g continue en y_0= f(x_0), alors la fonction g o f est continue en x_0

__Démonstration :__ f et g sont continues en x_0, donc $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ et $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

- On a $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$

  Alors $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=f(x_0)+g(x_0)$

  Ainsi la fonction f+g est continue en x_0.
- De même $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x).g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x).(\lim_{x\to x_0} g(x))$

  Alors $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x)=f(x_0).g(x_0)$.

  Ainsi la fonction f.g est continue en x_0

  $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.
- Si $\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)\neq 0$, alors $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$.

  Ainsi, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

- La fonction f est continue en x_0 et g continue en y_0= f(x_0), donc $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ et $\lim_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)$ Alors $\lim_{x\to x_0}(gof)(x)=\lim_{x\to x_0}[g(f(x))]=g(f(x_0))=gof(x_0)$.

  Ainsi la fonction go f est continue en x_0.

2. Continuité sur un intervalle

2.1 Définition

- On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en chaque point de cet intervalle.
- f est continue sur $[a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b

Graphiquement, une fonction est continue si la courbe représentative de cette fonction est continue

2.2 Fonctions de référence

- Les fonctions constantes sont continues sur IR
- La fonction définie par f(x) = x (identité de IR) est continue sur IR.
- La fonction définie $f(x)=\sqrt{x}$ (fonction racine carrée) est continue sur $IR^+=[0;+\infty[$

(Ces sont des conséquences directes des propriétés des limites)

Conséquences

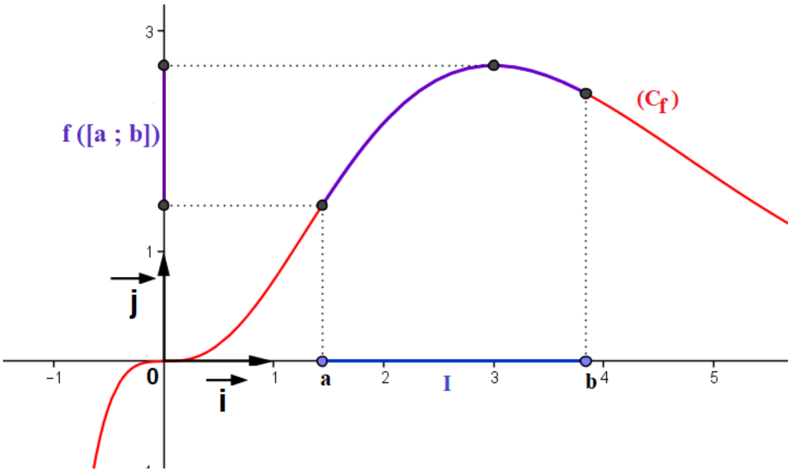
- Toute fonction polynôme est continue sur IR (ce sont des sommes de fonctions continues)

- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition (ce sont des quotients de fonctions continues)
- Si f est continue et positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I (c'est la composée de deux fonctions continues)

2.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$ alors l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle

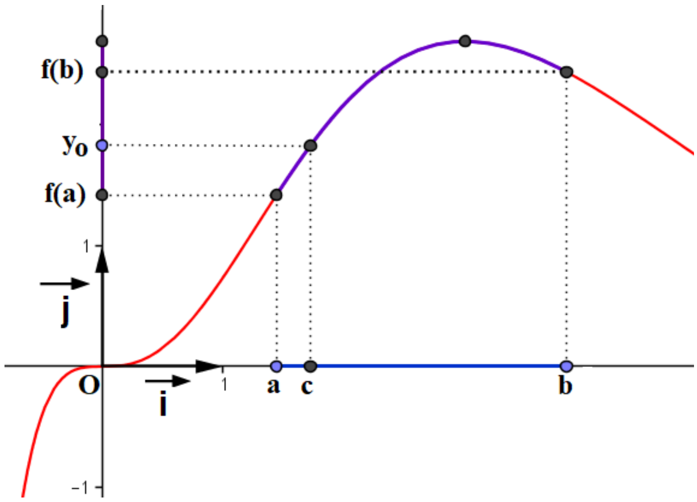


Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux éléments de l'ensemble de définition de f tels que a < b.

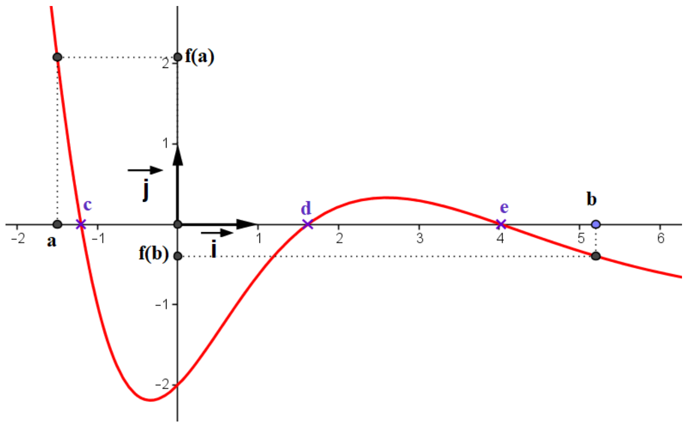
Si f est continue sur $[a,b]$ alors quel que soit y_0 appartenant à $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, il existe au moins $c \in [a,b]$ vérifiant $f(c) = y_0$; en d'autres termes, quel que soit $y \in [f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, l'équation $y_0 = f(x)$ admet au moins une solution $c \in [a,b]$.

Si, de plus, f est strictement monotone, cette solution est unique.



Cas particulier :

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$



La fonction f est continue sur [a ; b], et f(a) > 0 et f(b) < 0.

La courbe coupe l'axe des abscisses 3 fois : l'équation f(x)=0 admet trois solutions dans l'intervalle [a ; b] : ce sont c, d et e .

2.4 Prolongement par continuité.

Soit I un intervalle de IR, x_0 un élément de I, et f une fonction définie sur I - {x_0}.

Si f admet une limite finie en x_0, c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} f(x)$ est finie ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ est finie, alors f est prolongeable par continuité en x_0

On obtient une fonction continue g en posant :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \\ g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

Cette fonction g, continue en x_0, est appelée prolongement de f par continuité en x_0

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$.

Elle est définie sur $D_f =]-\infty; -1[U]-1; 1[U]1; +\infty[$. Elle n'est pas définie en -1, donc elle n'est pas continue en ce point.

Or $f(x) = \dfrac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x-1)(x+1)}$ donc, en simplifiant par (x+1), $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$

Ce qui donne $\lim_{x \to -1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

La fonction f admet une limite finie en -1, donc elle est prolongeable par continuité en -1.

La prolongement de f par continuité en -1 est la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si} \quad x \neq -1 \\ g(-1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.