Fractions rationnelles : exercices

Exercice 1

1. Déterminer le domaine de définition de chacune des expressions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$ d) $f(x)=\dfrac{x+7}{3x+5}$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ f) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$ g) $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x^2-8}$ h) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-2}$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer les racines du dénominateur, lorsqu'il en existe, et en déduire l'ensemble de définition de f(x) :

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+3x+2}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+3x-4}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^2-6x+9}$ f) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$ g) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+4}$ h) $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-1}{2x^2+x+1}$

Exercice 2

Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-5}{2x-5}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$ e) $f(x)=\dfrac{6x+3}{4x^2+4x+1}$ f) $f(x)=\dfrac{9x+3}{9x^2+6x+1}$

Exercice 3

Résoudre chacune des équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition

a) $\dfrac{x+1}{x}=0$ b) $\dfrac{x+1}{x}=2$ c) $\dfrac{x+1}{x}=1$ d) $\dfrac{x-1}{x^2+x-2}=0$

e) $\dfrac{x^2-x+2}{x^2+3x-4}=0$ f) $\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+4}=0$ g) $\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}=0$ h) $\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}=0$

i) $\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=0$ j) $\dfrac{3x^2+7x+2}{9x^2+6x+1}=0$ k) $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+6x+5}=0$ l) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x-6}=0$

Exercice 4

Résoudre chacune des équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition en effectuant un produit en croix :

a) $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x}{x+3}$ c) $\dfrac{2x+1}{x+2}=\dfrac{x}{x+1}$ d) $\dfrac{x+2}{2x+1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

Exercice 5

Résoudre chacune des équations suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition en ramenant au premier membre toutes les expressions de l'équation :

a) $\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{x}{x+1}$ b) $\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x+2}{x+1}$ c) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{x+1}$ d) $\dfrac{2x+3}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-2}$

Exemple : Résoudre l'équation $\frac{x+1}{2x-1}=\frac{x}{x+1}$

Réponse

Cette équation est équivalente à $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{x}{x+1}=0$ avec $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq-1$

En réduisant au même dénominateur on a $\frac{(x+1)(x+1)-x(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}=0$

Développons le numérateur $\frac{x^2+2x+1-2x^2+x}{(2x-1)(x+1)}=0$

ou $\frac{-x^2+3x+1}{(2x-1)(x+1)}=0$

Ce qui qui équivaut à $-x^2+3x+1=0$ avec $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq-1$

Résolvons alors cette équation.

$\Delta=3^2-4(-1)(1)=13$

$\Delta>0$ donc on a deux racines distinctes : $x'=\frac{-3-\sqrt{13}}{-2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ et

$x'=\frac{-3+\sqrt{13}}{-2}=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$

D'où $S=\left\{\frac{3-\sqrt{13}}{2};\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Exercice 6

Étudier le signe de chacune des expressions suivantes

a) $f(x)=\frac{2x-5}{3x-2}$ b) $f(x)=\frac{7x+2}{x-3}$ c) $f(x)=\frac{(2x-1)(x+10)}{3x-2}$

d) $f(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(3x+2)(x+5)}$ e) $f(x)=\frac{(5x+4)}{3x^2-2x-1}$ f) $f(x)=\frac{-2x^2+3x-1}{3x^2-8x-3}$

Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes

a) $\frac{x+1}{x}>0$ b) $\frac{x+1}{x}\leq 2$ c) $\frac{x+1}{x}<1$ d) $\frac{x+1}{x}\leq\frac{x}{x+1}$

e) $\frac{7x-2}{2x-3}>0$ f) $\frac{-x-2}{2x+5}\geq 0$ g) $\frac{x+2}{2x+5}>0$ h) $\frac{(5x+2)(x+1)}{(2x-3)(x+5)}<0$

i) $\frac{(x+2)(x+1)}{(2x-3)^2}<0$ j) $\frac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}\geq 0$ l) $\frac{x^2+x-6}{x^2-x+1}\geq 0$ m) $\frac{9x^2+6x-1}{x^2-3x+2}<0$